Capítulo 17: Indefinibilidad, indecidibilidad, incompletitud
Computability and Logic, Quinta edición

Recapitulando...

- Por los resultados del capítulo 15, el conjunto de (códigos de) oraciones del lenguaje de la aritmética y el conjunto de (códigos de) pruebas aritméticas son recursivos.
- Por los resultados del capítulo 16, podemos hablar de las funciones y los conjuntos recursivos dentro dentro de la aritmética.
- Esto quiere decir que podemos hablar de los conjuntos de oraciones y pruebas aritméticas dentro de la aritmética.

Números de Gödel, numerales de Gödel y diagonalización

- Dada cualquier expresión A del lenguaje de la aritmética y una codificación para las expresiones de dicho lenguaje, sabemos que hay un número de Gödel para A. Si a es este número, el numeral $\mathbf{a}$ para a, que consiste de $\mathbf{0}$ seguido por a tildes $'$, es el *numeral de Gödel* para A. Escribimos $\ulcorner A \urcorner$ para este numeral de Gödel. En términos más simples, $\ulcorner A \urcorner$ funciona como un nombre para la expresión A.
- Definimos la *diagonalización* de A como la expresión $\exists x(x = \ulcorner A \urcorner \,\&\, A)$.
- En el caso en que $A(x)$ sea una fórmula con una sola variable libre x, la diagonalización de $A(x)$ es la fórmula $\exists x(x = \ulcorner A \urcorner \,\&\, A(x))$ y dado que en general $\exists x(x = t \,\&\, F(x))$ es equivalente a $F(t)$, la diagonalización de $A(x)$ es equivalente a la fórmula $A(\ulcorner A \urcorner)$.
- $A(\ulcorner A \urcorner)$ es el resultado de sustituir el númeral de Gödel de A por la variable libre que ocurre en A. Es decir, la diagonalización de $A(x)$ expresa que la fórmula A es satisfecha por su propio número de Gödel.

El lema diagonal

- En el capítulo 15 se mostró que la función concatenación * es recursiva. También sabemos, por la proposición 15.1, que las operaciones lógicas *exquant* y *conj* son recursivas.
- La función *num*, que aplicada a un número n nos devuelve el número de Gödel del numeral $\mathbf{n}$, es también recursiva ya que $num(0) = z$ (donde z es el código para $\mathbf{0}$) y $num(n') = a * b * num(n) * c$ (donde a, b y c son los códigos para la tilde y los paréntesis izquierdo y derecho, respectivamente).
- Existe una función recursiva (primitiva) *diag* tal que si a es el número de Gödel de la expresión A, entonces $diag(a)$ nos devuelve el número de Gödel de la diagonalización de A.

- **Lema 17.0** La función *diag* es recursiva.

  Prueba Que *diag* es recursiva puede probarse como sigue

  $$diag(y) = exquant(v, conj(i * l * v * c * num(y) * r, y))$$

  donde v es el código de la variable, i, l, r y c son los códigos para la identidad, el paréntesis izquierdo, el paréntesis derecho y la coma, mientras que *exquant*, *conj*, *num* y * son las funciones mencionadas anteriormente.

  ■

- El siguiente resultado jugará un papel central en el teorema de incompletitud de Gödel.

  Lema 17.1 (Lema diagonal) Sea T una teoría que extiende a $\mathbf{Q}$. Luego, para cualquier fórmula $B(y)$, hay una oración G tal que

  $$\vdash_T G \leftrightarrow B(\ulcorner G \urcorner)$$

  Prueba Por el teorema 16.16, según el cual toda función recursiva es representable en $\mathbf{Q}$ (y por ende en cualquier teoría que extiende $\mathbf{Q}$), *diag* es representable en T. Es decir, hay una fórmula -llamémosla $Diag(x, y)$- tal que para cualesquiera números m y n,

  $$\text{si } diag(m) = n, \text{ entonces } \vdash_T \forall y(Diag(\mathbf{m}, y) \leftrightarrow y = \mathbf{n}).$$

  Sea $A(x)$ la fórmula $\exists y(Diag(x, y)\ \&\ B(y))$. Sea a el número de Gödel de $A(x)$ y sea $\mathbf{a}$ su numeral de Gödel. Sea G la oración $\exists x(x = \mathbf{a}\ \&\ \exists y(Diag(x, y)\ \&\ B(y))$. Luego, G es $\exists x(x = \mathbf{a}\ \&\ A(x))$ y es lógicamente equivalente a $A(\mathbf{a})$ o $\exists y(Diag(\mathbf{a}, y)\ \&\ B(y))$. Por lo tanto, tenemos:

  $$\vdash_T G \leftrightarrow \exists y(Diag(\mathbf{a}, y)\ \&\ B(y))$$

  Sea g el número de Gödel de G y sea $\mathbf{g}$ su numeral de Gödel. Dado que G es la diagonalización de $A(x)$, $diag(a) = g$, de modo que

  $$\vdash_T \forall y(Diag(\mathbf{a}, y) \leftrightarrow y = \mathbf{g})$$

  Se sigue que

  $$\vdash_T G \leftrightarrow \exists y(y = \mathbf{g}\ \&\ B(y))$$

  Por otra parte, tenemos

  $$\vdash_T \exists y(y = \mathbf{g}\ \&\ B(y)) \leftrightarrow B(\mathbf{g})$$

Podemos inferir entonces que

$$\vdash_T G \leftrightarrow B(\mathbf{g})$$

O, lo que es lo mismo,

$\vdash_T G \leftrightarrow B(\ulcorner G \urcorner)$ ■

Oraciones indecidibles

- Diré que una oración F es *refutable en una teoría* T si y sólo si $\sim F$ tiene prueba en T.

- Diré que una oración F es *indecidible en una teoría* T si y sólo si F no tiene prueba en T ni es refutable en T.

- (No confudir la noción de oración decidible en una teoría con la noción de teoría decidible).

- ¿Hay alguna oración que sea indecidible en la teoría **Q** (y en cualquier teoría que extienda a **Q**)? El teorema de incompletitud de Gödel nos da una respuesta afirmativa.

- Sea $Prf_T(x, y)$ una fórmula rudimentaria que se cumple cuando y es el número de Gödel de una derivación de la oración con número de Gödel x. Sea $Prov_T(x)$ la fórmula ($\exists$-rudimentaria) que se obtiene cuantificando existencialmente sobre $Prf_T(x, y)$. Es decir, $Prov_T(x)$ es $\exists y Prf_T(x, y)$, de modo que $Prov_T(x)$ se cumple si x es el número de Gödel de una oración que tiene una prueba en T.

- Diré que una teoría T es ω*-inconsistente* si y sólo si para alguna fórmula $F(x)$, se da que $\vdash_T \exists x F(x)$ pero $\vdash_T \sim F(\mathbf{n})$ para cada número natural n. Una teoría es ω-consistente si y sólo si no es ω-inconsistente[1].

- Por el lema diagonal, hay una oración, llamémosla G_T, tal que:

$$\vdash_T G_T \leftrightarrow \sim \exists y Prf_T(\ulcorner G_T \urcorner, y)$$

- G_T es la oración de Gödel para la teoría T. G_T es equivalente a una oración que afirma que no hay una prueba de G_T en T.

- **Teorema 17.9** Sea T una teoría consistente y axiomatizable que extiende a **Q**. Luego, G_T no tiene prueba en T y si T es ω-consistente, $\sim G_T$ tampoco tiene prueba en T.

  Prueba Supongamos que la oración G_T tiene una prueba en T, esto es, $\vdash_T G_T$. Luego, se da que $\mathcal{N}^* \vDash \exists y Prf_T(\ulcorner G_T \urcorner, y)$. Dado que esta oración es rudimentaria, por el teorema 16.13, $\vdash_T \exists y Prf_T(\ulcorner G_T \urcorner, y)$. De esto se sigue, utilizando la equivalencia mencionada más arriba, que $\vdash_T \sim G_T$. Pero esto quiere decir que T es inconsistente. Por lo tanto, G_T no tiene una prueba en T.

  Ahora supongamos que la oración $\sim G_T$ tiene una prueba en T, esto es, $\vdash_T \sim G_T$. De esto se sigue, utilizando la equivalencia de arriba, que $\vdash_T \exists y Prf_T(\ulcorner G_T \urcorner, y)$. Como T es consistente, G_T no tiene prueba en T.

[1] Una definición equivalente de ω-inconsistencia es la siguiente: una teoría T es ω-inconsistente si y sólo si $\vdash_T F(\mathbf{m})$ para cada número natural m, pero $\vdash_T \sim \forall x F(x)$.

Luego, tenemos $\mathcal{N}^* \vDash \sim Prf_T(\ulcorner G_T \urcorner, \mathbf{m})$ para todo m. Por el teorema 16.13, $\vdash_T \sim Prf_T(\ulcorner G_T \urcorner, \mathbf{m})$, para todo m. Pero esto quiere decir que T es ω-inconsistente. Por lo tanto, $\sim G_T$ no tiene una prueba en T.

■

- En el resultado previo, para mostrar que la oración $\sim \mathrm{G}_T$ no tiene prueba, utilizamos la suposición de que T es ω-consistente. El próximo resultado nos indica que la consistencia de T es suficiente para encontrar una oración indecidible.
- Sea $Disprf(x, y)$ una fórmula rudimentaria que se cumple cuando y es el número de Gödel de una derivación de la negación de la oración con número de Gödel x.
- Por el lema diagonal, hay una oración, llamémosla R_T, tal que:

$$\vdash_T R_T \leftrightarrow \forall y(Prf_T(\ulcorner R_T \urcorner, y) \rightarrow \exists z < y \; Disprf_T(\ulcorner R_T \urcorner, z))$$

- R_T es la oración de Rosser para T. R_T es equivalente a una oración que afirma que si R_T tiene una prueba en T que está codificada por un número y, entonces la negación de R_T tiene una prueba que está codificada por un número z menor a y.
- **Teorema 17.8** Sea T una teoría consistente y axiomatizable que extiende a $\mathbf{Q}$. Luego, R_T es indecidible en T.

  Prueba Supongamos que R_T tiene prueba en T, esto es, $\vdash_T R_T$. Luego, se da que hay un n tal que $\mathcal{N}^* \vDash Prf_T(\ulcorner R_T \urcorner, \mathbf{n})$. Dado que T es consistente, $\sim R_T$ no tiene prueba en T, esto es, $\nvdash_T \sim R_T$. En consecuencia, tenemos $\mathcal{N}^* \vDash \sim \exists z < \mathbf{n} \; Disprf_T(\ulcorner R_T \urcorner, z)$. Por tanto, podemos obtener $\mathcal{N}^* \vDash Prf_T(\ulcorner R_T \urcorner, \mathbf{n}) \;\&\; \sim \exists z < \mathbf{n} \; Disprf_T(\ulcorner R_T \urcorner, z)$. Esta oración es rudimentaria, con lo cual, por el teorema 16.13, se sigue que $\vdash_T Prf_T(\ulcorner R_T \urcorner, \mathbf{n})$ $\&\; \sim \exists z < \mathbf{n} \; Disprf_T(\ulcorner R_T \urcorner, z)$. Pero por la equivalencia de arriba, podemos inferir $\vdash_T \sim R_T$. Luego, T es inconsistente. Por lo tanto, R_T no tiene prueba en T.

  Ahora supongamos que $\sim R_T$ tiene prueba en T, esto es, $\vdash_T \sim R_T$. Luego, se da que hay un m tal que $\mathcal{N}^* \vDash Disprf_T(\ulcorner R_T \urcorner, \mathbf{m})$. Por el teorema 16.13, tenemos $\vdash_T Disprf_T(\ulcorner R_T \urcorner, \mathbf{m})$. De esto se sigue que $\vdash_T \forall y(\mathbf{m} < y \rightarrow \exists z < y \; Disprf_T(\ulcorner R_T \urcorner, z))$. Por otra parte, dado que T es consistente, R_T no tiene prueba en T, esto es, $\nvdash_T R_T$. En consecuencia, tenemos $\mathcal{N}^* \vDash \forall x(x < \mathbf{m} \vee x = \mathbf{m} \rightarrow \sim Prf_T(\ulcorner R_T \urcorner, x))$. Esta oración es rudimentaria, con lo cual, por el teorema 16.13, se sigue que $\vdash_T \forall x(x < \mathbf{m} \vee x = \mathbf{m} \rightarrow \sim Prf_T(\ulcorner R_T \urcorner, x))$. Además, puesto que T extiende $\mathbf{Q}$, tenemos $\vdash_T \forall y(y < \mathbf{m} \vee y = \mathbf{m} \vee \mathbf{m} < y)$. Se sigue que $\vdash_T \forall y(Prf_T(\ulcorner R_T \urcorner, y) \rightarrow \exists z < y Disprf_T(\ulcorner R_T \urcorner, z))$. Por la equivalencia de arriba, inferimos $\vdash_T R_T$, de modo que T es inconsistente. Luego, $\sim R_T$ no tiene prueba en T.

■

Resultados negativos

- Una vez que tenemos el lema diagonal a nuestra disposición, los resultados de indefinibilidad, indecidibilidad e incompletitud surgen casi instantáneamente.

- **Lema 17.2** Sea T una teoría consistente que extiende a $\mathbf{Q}$. Luego, el conjunto de números de Gödel de los teoremas de T no es definible en T.

  Prueba Supongamos que hay una fórmula $F(y)$ que define el conjunto de (los números de Gödel de) los teoremas de T. Por el lema diagonal hay una oracion G tal que

  $$\vdash_T G \leftrightarrow {\sim}F(\ulcorner G \urcorner)$$

  Supongamos ahora que $\nvdash_T G$ y sea g el número de Gödel de G. Luego, g no pertenece al conjunto de (los números de Gödel de) los teoremas de T. Pero como $F(y)$ define ese conjunto, tenemos

  $$\vdash_T {\sim}F(\mathbf{g})$$

  Pero por la transitividad de $\leftrightarrow$, podemos obtener

  $$\vdash_T G.$$

  Con lo cual, G es un teorema de T, contra nuestra suposición inicial. Pero si G es un teorema de T, entonces g pertenece al conjunto definido por $F(y)$, y por ende podemos inferir

  $$\vdash_T F(\mathbf{g}).$$

  Y, por tanto

  $$\vdash_T {\sim}G.$$

  De modo que T es inconsistente. Por lo tanto, se sigue que $F(y)$ no define el conjunto de (los números de Gödel de) los teoremas de T. ■

- **Teorema 17.3 (Teorema de Tarski)** El conjunto de números de Gödel de las oraciones del lenguaje de la aritmética que son verdaderas en el modelo estándar no es aritméticamente definible.

  Prueba Dicho conjunto es la teoría que venimos llamando *aritmética verdadera*. Por ende definibilidad aritmética en este caso es simplemente definibilidad en esta teoría. Luego, este teorema es simplemente una instancia del lema 17.2. ■

- **Teorema 17.4 (Indecidibilidad de la aritmética)** El conjunto de números de Gödel de las oraciones del lenguaje de la aritmética que son verdaderas en el modelo estándar no es recursivo.

  Prueba Esto se sigue del teorema previo junto con el hecho de que todos los conjuntos recursivos son definibles en la aritmética. ■

- Asumiendo la tesis de Church, obtenemos lo siguiente:

- **Teorema 17.5 (Indecidibilidad esencial)** Ninguna teoría consistente que extienda a **Q** es decidible (y en particular **Q** es ella misma indecidible).

  Prueba Sea T una teoría consistente que extiende a **Q**. Por el lema 17.2, el conjunto de (los números de Gödel de) los teoremas de T no es definible en T. Dado que todo conjunto recursivo es definible en T, se sigue que dicho conjunto no es recursivo. Por la tesis de Church, tampoco es decidible. ■

- **Teorema 17.6 (Teorema de Church)** El conjunto de oraciones válidas no es decidible.

  Prueba Sea C la conjunción de todos los axiomas de **Q**. Una oración A es un teorema de **Q** si y sólo si A se sigue de C. Es decir, si y sólo si $\sim C \vee A$ es válida. Sea f la función que va del número de Gödel de A al número de Gödel de $\sim C \vee A$ (dicha función es recursiva, pues $f(y) = disj(neg(c), y)))$. Sea Λ el conjunto de (los números de Gödel de) las oraciones válidas y sea Ω el conjunto de (los números de Gödel de) los teorema de **Q**. Si Λ fuera decidible, entonces el conjunto Ω de los números de Gödel de los teoremas de **Q** podría obtenerse sustituyendo la función recursiva f en el conjunto Λ de la siguiente forma:

  $$a \text{ está en } \Omega \text{ si y sólo si } f(n) \text{ está en } \Lambda.$$

  Pero de esto se sigue que Ω es un conjunto recursivo, lo cual contradice el teorema 17.5. Por lo tanto, Λ no es decidible. ■

- **Teorema 17.7 (Primer teorema de Gödel)** No hay ninguna extensión consistente, completa y axiomatizable de **Q**. O, dicho de otro modo, cualquier axiomatización consistente que extiende a **Q** es incompleta.

  Prueba Por el corolario 15.7, cualquier teoría completa axiomatizable es decidible. Por el teorema 17.5, ninguna extensión consistente de **Q** es decidible. ■