Capítulos 10: Semántica
(*Computability and Logic*, Quinta edición)

La definición de Tarski

- $\mathcal{M} \vDash R(t_1, ..., t_n)$ si y sólo si $R^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}, ..., t_n^{\mathcal{M}})$.
- $\mathcal{M} \vDash \sim F$ si y sólo si $\mathcal{M} \nvDash F$.
- $\mathcal{M} \vDash (F \vee G)$ si y sólo si $\mathcal{M} \vDash F$ o $\mathcal{M} \vDash G$.
- $\mathcal{M} \vDash \exists x F$ si y sólo si para algún termino cerrado t, $\mathcal{M} \vDash F(t)$.

Ejemplo 10.1 *Tres interpretaciones para el lenguaje de la aritmética.*

- La primera interpretación es la estándar $\mathcal{N}^*$, la segunda interpretacion $\mathcal{Q}$ fue presentada en el capítulo 9 y su dominio estaba compuesto por los racionales no negativos, y la tercera interpretación es $\mathcal{R}$ cuyo dominio son los números reales no negativos.
- $\exists x(x + x = \mathbf{1})$ debería ser verdadera en $\mathcal{Q}$ y en $\mathcal{R}$.
- $\exists x(x \cdot x = \mathbf{2})$ deberia ser verdadera en $\mathcal{R}$.

El enfoque objectual

- $\mathcal{M} \vDash \exists x F$ si y sólo si para algún m en el dominio, $\mathcal{M} \vDash F[m]$.
(donde $\mathcal{M} \vDash F[m]$ quiere decir que 'si extendemos el lenguaje con una constante c y si entre las interpretaciones que extienden a $\mathcal{M}$ consideramos una que le asigna el objeto m a la constante c, $F(c)$ es verdadera).
- Por ejemplo, si $F(x)$ es $x \cdot x = \mathbf{2}$ y consideramos la interpretación $\mathcal{R}$, está claro que $\sqrt{2}$ satisface $F(x)$. Pues si extendemos el lenguaje con una constante c y consideramos un modelo que extiende a $\mathcal{R}$ haciendo que c denote a $\sqrt{2}$, $F(c)$ es verdadera.

Nociones metalógicas

- Una oración D es *válida* si ninguna interpretación la hace falsa.
- Γ *implica* D si y sólo si ninguna interpretación hace verdaderas a todas las oraciones de Γ y falsa a D.
- Una oración D es *satisfacible* si hay una interpretación que la hace verdadera e *insatisfacible* en case contrario.
- Dos oraciones son *lógicamente equivalentes* si todas las interpretaciones les asignan el mismo valor.

Ejercicios

1. Muestre que $\{C_1, ..., C_m\}$ es insatisfacible si y sólo si $\sim C_1 \vee .... \vee \sim C_m$ es válida.

2. Muestre que $B(t)$ y $\exists x(x = t \,\&\, B(x))$ son lógicamente equivalentes.

3. Si $\Gamma \cup \{B_1, ..., B_n\}$ implica D y para cada $m < n$, B_m implica B_{m+1}, entonces $\Gamma \cup \{B_1\} \cup \{\sim D\}$ es insatisfacible.

4. Muestre que si una oración G resulta de una oración F al reemplazar cada ocurrencia de una oración atómica A por una oración equivalente B, entonces F y G son lógicamente equivalentes (Sugerencia: pruébelo por inducción sobre la complejidad).