Capítulo 12: Modelos
Computability and Logic, Quinta edición

Para refrescar la memoria

- Un *modelo* de un conjunto de oraciones Γ es una interpretación que hace verdadera a cada oración de Γ. Un conjunto de oraciones Γ *implica* una oración D si todo modelo de Γ es un modelo de D. Una oración D es *válida* si toda interpretación es un modelo de D. Una oración D es *satisfacible* si al menos una interpretación es un modelo de D.

El tamaño de los modelos

- El *tamaño* de un modelo es el tamaño de su dominio. Decimos que un modelo es *finito*, *enumerable*, *no enumerable*, etc. si su dominio es finito, enumerable, no enumerable, etc.
- Un conjunto de oraciones Γ tiene *modelos finitos arbitrariamente grandes* si para cada entero positivo m hay un entero positivo $n \geq m$ tal que Γ tiene modelos de tamaño n.

Cómo hablar del tamaño del dominio

- Consideremos un lenguaje puramente lógico, i.e. un lenguaje que carece de vocabulario no lógico.
- El dominio tiene al menos n elementos:
  $I_n \quad \forall x_1 \forall x_2 ... \forall x_{n-1} \exists x_n (x_n \neq x_1 \,\&\, x_n \neq x_2 \,\&\, ... \,\&\, x_n \neq x_{n-1})$
- El dominio tiene a lo sumo n elementos:
  $J_n \quad \sim \forall x_1 \forall x_2 ... \forall x_n \exists x_{n+1} (x_{n+1} \neq x_1 \,\&\, x_{n+1} \neq x_2 \,\&\, ... \,\&\, x_{n+1} \neq x_n)$
- Es decir, $J_n = \sim I_{n+1}$.
- El dominio tiene exactamente n elementos:
  $I_n \,\&\, J_n$

Conjuntos de fórmulas con modelos infinitos

- El conjunto Γ formado por $I_1, I_2, ..., I_n, I_{n+1}, ...$ sólo tiene modelos infinitos. Cualquier subconjunto finito de Γ tiene un modelo finito (de hecho, tiene infinitos modelos finitos). ¿Hay algun subconjunto infinito de Γ que tenga un modelo finito?
- La siguiente oración INF sólo tiene modelos infinitos:

$$\forall x \exists y Rxy \,\&\, \forall x \forall y \sim (Rxy \,\&\, Ryx) \,\&\, \forall x \forall y \forall z (Rxy \,\&\, Ryz \rightarrow Rxz)$$

- ¿Hay algún modelo infinito que contenga a los números naturales y que no haga verdadera a la oración INF donde R sea la relación *menor*?

¿Cuántos modelos diferentes tiene un conjunto de oraciones?

- Toda oración satisfacible tiene una cantidad no enumerable de modelos.
- Dos interpretaciones $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ del mismo lenguaje L son *isomórficas* si y sólo si hay una correspondencia j entre los individuos p en el dominio $|\mathcal{P}|$ y los individuos q en el dominio $|\mathcal{Q}|$ sujeta a la siguientes condiciones:
  - para cada predicado n-ádico R y para $p_1, ..., p_n$ en $|\mathcal{P}|$ se cumple: $R^{\mathcal{P}}(p_1, ..., p_n)$ si y sólo si $R^{\mathcal{Q}}(j(p_1), ..., j(p_n))$.
  - para cada constante c se cumple: $j(c^{\mathcal{P}}) = c^{\mathcal{Q}}$.
  - para cada símbolo de función f y $p_1, ..., p_n$ en $|\mathcal{P}|$ se cumple: $j(f^{\mathcal{P}}(p_1, ..., p_n)) = f^{\mathcal{Q}}(j(p_1), ..., j(p_n))$.

Ejemplo de isomorfismo

- Sea L un lenguaje con un predicado diádico $<$. Consideremos un modelo con dominio $\{0, 1, 2, 3, ...\}$ donde la interpretación de $<$ es la relación *menor*, y otro modelo con dominio $\{0, -1, -2, -3, ...\}$ donde la interpretacion de $<$ es la relación *mayor*. La correspondencia que asocia n con $-n$ es un isomorfismo, ya que m es menor que n si y sólo si $-m$ es mayor que $-n$.
- Sea $\mathbf{0}$ una constante que denota 0, $pred(x)$ un símbolo de función que denota la función predecesor, $x + y$ un símbolo de función que denota la función suma y $x \cdot y$ un símbolo de función que denota la función que nos lleva de x e y al negativo de su producto $-(x.y)$. Esa interpretación es isomórfica a la interpretación estándar del lenguaje de la aritmética.

Proposición Sean X e Y conjuntos y supongamos que hay una correspondencia j de X en Y. Luego, si $\mathcal{Y}$ es una interpretación con dominio Y, entonces hay una interpretación $\mathcal{X}$ con dominio X que es isomórfica a $\mathcal{Y}$. En particular, para cualquier interpretación con un dominio de n elementos, hay una interpretación isomórfica cuyo dominio es $\{0, 1, 2, ..., n-1\}$, y para cualquier interpretacion con un dominio denumerable, hay una interpretación isomórfica con dominio $\{0, 1, 2, 3, ...\}$.

Prueba Vea el libro, p. 140.

Lemma de isomorfismo Si hay un isomorfismo entre dos interpretaciones $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ del mismo lenguaje L, entonces para cada oración A de L tenemos:

$$\mathcal{P} \vDash A \text{ si y sólo si } \mathcal{Q} \vDash A$$

Prueba La prueba es por inducción sobre la complejidad. Vea el libro, p.140-142.

El teorema de compacidad y el teorema de Löwenheim-Skolem

Theorema (Compacidad) Si todo subconjunto finito de un conjunto de oraciones tiene un modelo, entonces el conjunto tiene un modelo.

Prueba Vea el capítulo 13 o espere a que veamos la prueba de completitud. ■

Teorema (Löwenheim-Skolem) Si un conjunto de oraciones tiene un modelo, entonces tiene un modelo enumerable.

Prueba Vea el capítulo 13 o espere a que veamos la prueba de completitud. ■

Corolario (Principio de overspill) Si un conjunto de oraciones tiene modelos finitos arbitrariamente grandes, entonces tiene un modelo denumerable.

Prueba Sea Γ un conjunto de oraciones con modelos finitos arbitrariamente grandes. Para cada m sea I_m una oración que es verdadera en un modelo si y sólo si el modelo tiene tamaño $\geq m$. Sea

$$\Gamma^* = \Gamma \cup \{I_1, I_2, I_3, ...\}$$

el resultado de añadir todas las I_m a Γ. Cualquier subconjunto finito de Γ^* es un subconjunto de $\Gamma \cup \{I_1, I_2, ..., I_m\}$ para algún m y dado que Γ tiene un modelo de tamaño $\geq m$, dicho conjunto tiene un modelo. Por el teorema de Compacidad, Γ^* tiene un modelo. Dicho modelo es por supuesto un modelo de Γ, y al ser también un modelo de cada I_m, tiene tamaño $\geq m$ para cada m finito y por tanto es infinito. Por el teorema de L-S podemos inferir que tiene un modelo denumerable. ■

Decimos que un conjunto Γ de oraciones es (implicacionalmente) *completo* si para cada oración A en el lenguaje, o bien A o bien $\sim A$ es una consecuencia de Γ. Decimos que un conjunto Γ es *denumerablemente categórico* si cualesquiera dos modelos denumerables de Γ son isomórficos.

Corolario (El test de Vaught) Si Γ es un conjunto denumerablemente categórico de oraciones que carece de modelos finitos, entonces Γ es completo.

Prueba Supongamos que Γ no es completo. Luego, hay una oración A tal que ni A ni $\sim A$ son consecuencias de Γ. Podemos inferir entonces que $\Gamma \cup \{A\}$ y $\Gamma \cup \{\sim A\}$ son ambos satisfacibles. Por el teorema L-S ambos conjuntos tienen modelos enumerables $\mathcal{P}^+$ y $\mathcal{P}^-$. Dado que Γ no tiene modelos finitos, tanto $\mathcal{P}^+$ como $\mathcal{P}^-$ son denumerables, y como Γ es denumerablemente categórico, $\mathcal{P}^+$ y $\mathcal{P}^-$ son isomórficos. Sin embargo, por el lema de isomorfismo, no puede darse que A sea verdadero en uno y falso en el otro. Luego, no pueden ser isomórficos. Se sigue que Γ es completo. ■

Ejercicios

Dificultad accesible:

1. Use el teorema de Compacidad para mostrar que:
   (a) Γ es insatisfacible si y sólo si $\sim C_1 \vee ... \vee \sim C_m$ es válida para algunos $C_1, ..., C_m$ en Γ.
   (b) D es una consecuencia de Γ si y sólo si D es una consecuencia de algún subconjunto finito de Γ.
   (c) D es una consecuencia de Γ si y sólo si $\sim C_1 \vee ... \vee \sim C_m \vee D$ es válida para algunos $C_1, ..., C_m$ en Γ.
2. Use el teorema de Löwenheim-Skolem para mostrar que que si dos oraciones tienen los mismos modelos enumerables, entonces son lógicamente equivalentes.
3. Considere un lenguaje cuyo único símbolo no lógico es el predicado diádico $\mathcal{Q}$. Sea $\mathcal{U}$ la interpretación cuyo dominio consiste en los cuatro lados de un cuadrado y la denotación de $\mathcal{Q}$ es la relación de ser paralelo. Sea $\mathcal{V}$ una interpretación cuyo dominio consiste en los cuatro vértices de un cuadrado y la denotación de $\mathcal{Q}$ es la relación de oponerse diagonalmente. Muestre que $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ son isomórficos.
4. Considere un lenguaje cuyo único símbolo no lógico es un predicado diádico $<$. Los modelos de la siguiente oración OL del lenguaje son llamados 'órdenes lineales':
   $$\begin{gathered} \forall x \sim x < x \& \\ \forall x \forall y \forall z ((x < y \,\&\, y < z) \rightarrow x < z) \& \\ \forall x \forall y (x < y \vee x = y \vee y < x) \end{gathered}$$
   Dicho modelo $\mathcal{A}$ consiste de un conjunto no vacio A y una relación diádica $<_A$ sobre A. Muestre que la oración de arriba implica
   $$\forall x \forall y \sim (x < y \,\&\, y < x)$$
5. Continuando con el ejercicio anterior, un *isomorfismo finito parcial* entre los órdenes lineales $(A, <_A)$ y $(B, <_B)$ es una función j de un subconjunto finito de A sobre un subconjunto finito de B tal que para cualesquiera a_1 y a_2 en el dominio de j, $a_1 <_A a_2$ si y sólo si $j(a_1) <_B j(a_2)$. Muestre que si j es un isomorfismo finito parcial del orden lineal $(A, <_A)$ a los números racionales con su orden usual, y a es cualquier elemento de A que no está en el dominio de j, entonces j puede extenderse a un isomorfismo finito parcial cuyo dominio es el dominio de j junto con a. (Aquí *extender* quiere decir que el nuevo isomorfismo asigna el mismo número racional que el viejo isomorfismo a los elementos de A que ya están en el dominio del isomorfismo viejo).

Dificultad intermedia:

1. Usamos $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$ para indicar que $\mathcal{A}$ es isomórfico a $\mathcal{B}$. Muestre que para todas las interpretaciones $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ del mismo lenguaje se cumple que:
(a) $\mathcal{A} \cong \mathcal{A}$;
(b) Si $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$, entonces $\mathcal{B} \cong \mathcal{A}$;
(c) Si $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$ y $\mathcal{B} \cong \mathcal{C}$, entonces $\mathcal{A} \cong \mathcal{C}$. (Sugerencia: recuerde el ejercicio 1.3).

2. La *aritmética verdadera* es el conjunto Γ de todas las oraciones del lenguaje de la aritmética que son verdaderas en la interpretación estándar. Un *modelo no estándar de la aritmética* es un modelo de Γ que no es isomórfico al modelo estándar de la aritmética. Sea Δ el conjunto de oraciones que se obtiene al agregar la constante c al lenguaje y añadir las oraciones $c \neq \mathbf{0}, c \neq \mathbf{1}, c \neq \mathbf{2}$, y así sucesivamente, a Γ. Muestre que cualquier modelo de Δ nos da un modelo no estándar de la aritmética. (Sugerencia: use el teorema de Compacidad).

3. Para cualquier número primo $p = 2, 3, 5, \ldots$, sea $D_p(x)$ la fórmula $\exists y(\mathbf{p} \cdot y = x)$ del lenguaje de la aritmética, de modo que para cualquier número natural n, $D_p(\mathbf{n})$ es verdadera si y sólo si p divide a n sin resto. Sea S cualquier conjunto de primos. Decimos que un modelo no estándar de la aritmética $\mathcal{M}$ *encripta* S si hay un objeto m en el dominio $|\mathcal{M}|$ tal que $\mathcal{M} \vDash D_p[m]$ para todo p perteneciente a S, y $\mathcal{M} \vDash \sim D_p[m]$ para todo p no perteneciente a S. Muestre que para cualquier conjunto S de primos hay un modelo no estándar enumerable de la aritmética que encripta S. (Sugerencia: use el teorema de Compacidad).