Capítulos 9: Sintaxis
(*Computability and Logic*, 5th edition)

Lógica de primer orden

- Los símbolos lógicos son los siguientes: $\sim$ es la negación, & es la conjunción, $\vee$ es la disyunción, $\rightarrow$ es el condicional, $\leftrightarrow$ es el bicondicional, $\forall x$ es el cuantificador universal y $\exists x$ es el cuantificador existencial.
- Los símbolos no lógicos son las constantes de individuo y los predicados.
- La identidad como predicado lógico.
- Los símbolos de función.
- Fórmulas cerradas y abiertas. Términos cerrados y abiertos.

Ejemplo 9.1

- El *lenguaje de la aritmética* L^* tiene como símbolos no lógicos a la constante cero $\mathbf{0}$, al predicado diádico menor que $<$, al símbolo de función monádico sucesor $'$ y a los símbolos de función diádicos producto $\cdot$ y suma $+$.

Interpretaciones

- Una interpretación $\mathcal{M}$ para un lenguaje L consiste de dos componentes: un conjunto no vacío $|\mathcal{M}|$, el dominio de la interpretación, y para cada expresión no lógica, una función que le asigna una *denotación*.
- Para una constante c, $c^{\mathcal{M}} \in |\mathcal{M}|$ (i.e. la denotación de la constante c pertenece al dominio de la interpretación).
- Para un predicado n-ario R, $R^{\mathcal{M}} \subseteq |\mathcal{M}|^n$.
- Para un símbolo de función n-ario f, $f^{\mathcal{M}}$ es una función de $|\mathcal{M}|^n$ en $|\mathcal{M}|$.

Ejemplo 9.2

- La *interpretación estándar del lenguaje de la aritmética* $\mathcal{N}^*$ tiene como dominio a $\mathbb{N}$. La denotacion $\mathbf{0}^{\mathcal{N}^*}$ de $\mathbf{0}$ es el número cero, la denotación $<^{\mathcal{N}^*}$ de $<$ es la relación de ser menor, la denotación $'^{\mathcal{N}^*}$ de $'$ es la función sucesor y las denotaciones $+^{\mathcal{N}^*}$ y $\cdot^{\mathcal{N}^*}$ para $+$ y $\cdot$ son las funciones de suma y producto, respectivamente.

1. $\forall x \forall y (x \cdot y = \mathbf{0}'' \rightarrow (\mathbf{x} = \mathbf{0}'' \vee \mathbf{y} = \mathbf{0}''))$
2. $\forall x \exists y (x < y \,\&\, \sim \exists z (x < z \,\&\, z < y))$
3. $\forall x (x < x' \,\&\, \sim \exists z (x < z \,\&\, z < x'))$

Ejemplo 9.3

- Dos *interpretaciones alternativas para el lenguaje de la aritmética.*
- La interpretación $\mathcal{Q}$ tiene como dominio a los números racionales no negativos y las denotaciones de $\mathbf{0}, <, ', +$ y $\cdot$ son las usuales.
- ¿Qué ocurre con las oraciones 2 y 3 en $\mathcal{Q}$?
- La interpretación $\mathcal{P}$ tiene como dominio a los medio enteros no negativos $\{0, \frac{1}{2}, 1, 1\frac{1}{2}, 2, 2\frac{1}{2}, ...\}$ y las denotaciones de $\mathbf{0}, <, '$ y $+$ son las usuales. (La multiplicación no puede interpretarse de la forma usual).
- ¿Qué ocurre con las oraciones 2 y 3 en $\mathcal{P}$?

Sintaxis y pruebas por inducción sobre la complejidad de las fórmulas

- El lenguaje oficial de la aritmética y el lenguaje no oficial.
- Pruebas por inducción sobre la complejidad (i.e. el número de conectivas y cuantificadores) de las fórmulas.
- Paso base: las fórmulas atómicas tienen la propiedad.
- Paso inductivo: Si una fórmula más compleja se forma aplicando operaciones lógicas a fórmulas más simples, luego, si asumimos (hipótesis inductiva) que las fórmulas más simples tienen la propiedad, se sigue que la fórmula más compleja tiene la propiedad.

Lema 9.4(a) Toda fórmula (escrita en la notación oficial) termina en un paréntesis derecho.

Prueba Paso base: Todas las fórmulas atómicas son de la forma $R(t_1, ..., t_n)$ y por tanto terminan en un paréntesis derecho.

Paso inductivo: Sea F una fórmula de complejidad k.

- Si F es una negación $\neg G$, por la hipótesis inductiva sabemos que G termina en un paréntesis derecho, ya que tiene complejidad menor a k. Por tanto, $\neg G$ también termina en un paréntesis derecho.
- Si F es una disyunción $(G \vee H)$, obviamente termina en un paréntesis derecho.
- Si F es una cuantificación existencial $\exists x G$, por la hipótesis inductiva sabemos que G termina en un paréntesis derecho, ya que tiene complejidad menor a k. Por ende, $\exists x G$ termina en un paréntesis derecho.

Ejercicios

1. Muestre que toda fórmula (escrita en la notación oficial del capítulo 9) tiene igual número de paréntesis izquierdos y derechos.
2. Muestre que toda fórmula del lenguaje proposicional tiene más letras proposicionales que conectivas binarias.