Capítulo 14: Pruebas y Completitud
Computability and Logic, Quinta edición

Conclusiones singulares y conclusiones múltiples

- Un conjunto de fórmulas Γ *implica* una fórmula D si toda interpretación que hace verdadera a cada fórmula de Γ hace verdadera a D.
- Un conjunto de fórmulas Γ *implica* un conjunto de fórmulas Δ si toda interpretación que hace verdadera a cada fórmula de Γ hace verdadera a *alguna* fórmula de Δ.
- Si entendemos el conjunto de premisas de manera conjuntiva, debemos entender el conjunto de conclusiones de manera disyuntiva.

Secuentes

- Un *secuente* es un objeto de la forma $\Gamma \Rightarrow \Delta$ donde Γ y Δ son conjuntos de fórmulas. Γ es el *antesecuente* y Δ es el *postsecuente*.
- Una lectura intuitiva para $\Gamma \Rightarrow \Delta$: si acepto todas las fórmulas de Γ, no puedo rechazar todas las fórmulas de Δ.
- Si Γ y Δ son conjuntos finitos $\{\gamma_1, ..., \gamma_n\}$ y $\{\delta_1, ..., \delta_m\}$, podemos leer $\Gamma \Rightarrow \Delta$ como $\gamma_1 \,\&\, ... \,\&\, \gamma_n \rightarrow \delta_1 \vee ... \vee \delta_m$.

Un cálculo de secuentes para la lógica de primer orden

Definición El sistema LK para la lógica de primer orden contiene los siguientes secuentes iniciales (axiomas) y las siguientes reglas[1]:

Secuentes iniciales

$$\text{Ax}\ \frac{}{A \Rightarrow A}$$

Reglas estructurales

$$\textit{Corte}\ \frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \qquad \Gamma, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta}$$

$$\textit{Monotonía}\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'}$$

[1] Para simplificar la presentación, asumiré que el lenguaje carece del predicado de identidad y de símbolos de función.

Reglas operacionales

$$\text{L}\sim \frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta}{\Gamma, \sim A \Rightarrow \Delta} \qquad \text{R}\sim \frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \sim A, \Delta}$$

$$\text{L}\vee \frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta \qquad \Gamma, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \vee B \Rightarrow \Delta} \qquad \text{R}\vee \frac{\Gamma \Rightarrow A, B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \vee B, \Delta}$$

$$\text{L}\exists \frac{\Gamma, A(s) \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \exists x A(x) \Rightarrow \Delta} \text{ donde } s \text{ no ocurre en } \Gamma, \Delta \text{ o } A(x) \qquad \text{R}\exists \frac{\Gamma \Rightarrow A(t), \Delta}{\Gamma \Rightarrow \exists x A(x), \Delta}$$

Características del cálculo

- Sistemas axiomáticos, sistemas de deducción natural y cálculos de secuentes.
- Hay dos tipos de reglas: estructurales y operacionales.
- Todas las derivaciones deben comenzar con un secuente inicial. Todas las derivaciones tienen fórma de árbol.
- Las reglas para la conjunción, el condicional y el cuantificador universal:

$$\text{L}\& \frac{\Gamma, A, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \,\&\, B \Rightarrow \Delta} \qquad \text{R}\& \frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \qquad \Gamma \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \,\&\, B, \Delta}$$

$$\text{L}\rightarrow \frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \qquad \Gamma, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \Rightarrow \Delta} \qquad \text{R}\rightarrow \frac{\Gamma, A \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \rightarrow B, \Delta}$$

$$\text{L}\forall \frac{\Gamma, A(t) \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \forall x A(x) \Rightarrow \Delta} \qquad \text{R}\forall \frac{\Gamma \Rightarrow A(s), \Delta}{\Gamma \Rightarrow \forall x A(x), \Delta} \text{ donde } s \text{ no ocurre en } \Gamma, \Delta \text{ o } A(x)$$

- No hay reglas de eliminación, excepto por Corte. Pero Corte es eliminable!

Algunos ejemplos

$$\text{R}\vee \frac{\text{R}\sim \dfrac{A \Rightarrow A}{\Rightarrow A, \sim A}}{\Rightarrow A \vee \sim A}$$

$$\text{R}\rightarrow \frac{\text{R}\rightarrow \dfrac{\textit{Monotonía} \dfrac{A \Rightarrow A}{A, B \Rightarrow A}}{A \Rightarrow B \rightarrow A}}{\Rightarrow A \rightarrow (B \rightarrow A)}$$

$$\text{R}\rightarrow \frac{\text{L}\rightarrow \dfrac{\text{R}\rightarrow \dfrac{\textit{Monotonía} \dfrac{A \Rightarrow A}{A \Rightarrow A, B}}{\Rightarrow A, A \rightarrow B} \qquad A \Rightarrow A}{(A \rightarrow B) \rightarrow A \Rightarrow A}}{\Rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A}$$

$$
\dfrac{\dfrac{A(t) \Rightarrow A(t)}{\forall x A(x) \Rightarrow A(t)}\,\mathrm{L}\forall}{\forall x A(x) \Rightarrow \forall y A(y)}\,\mathrm{R}\forall
$$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{R(t,s) \Rightarrow R(t,s)}{R(t,s) \Rightarrow \exists y R(t,y)}\,\mathrm{R}\exists}{\forall y R(y,s) \Rightarrow \exists y R(t,y)}\,\mathrm{L}\forall}{\exists x \forall y R(y,x) \Rightarrow \exists y R(t,y)}\,\mathrm{L}\exists}{\exists x \forall y R(y,x) \Rightarrow \forall x \exists y R(x,y)}\,\mathrm{R}\forall
$$

Propiedades del cálculo de secuentes

- La propiedad de subfórmula.
- La lógica intuicionista y la lógica clásica.
- Modularidad de las reglas.
- Sistemas de deducción natural.

Completitud y Corrección

- *Correccion*: Si hay una derivación de $\Gamma \Rightarrow \Delta$, entonces Γ implica Δ (i.e. $\Gamma \models \Delta$).
- *Completitud*: Si Γ implica Δ, entonces hay una derivación de $\Gamma \Rightarrow \Delta$.

Prueba de Corrección

- Para probar este resultado sólo necesitamos cerciorarnos de que (1) A implica semánticamente A para toda fórmula A, y de que (2) todas las reglas del cálculo son tales que si el (los) secuente(s) de arriba (son) es semánticamente válido(s), el secuente de abajo también lo es. Daré un ejemplo. Consideremos la regla L$\sim$. Supongamos que todo modelo de Γ es un modelo de $\{A\} \cup \Delta$ o, en otras palabras, que si todas las fórmulas de Γ son verdaderas, A es verdadera o alguna fórmula de Δ es verdadera. Supongamos ahora que todas las fórmulas de Γ son verdaderas y que $\sim A$ es verdadera, se sigue que alguna fórmula de Δ es verdadera, es decir, todo modelo de $\Gamma \cup \{\sim A\}$ es un modelo de Δ. Los casos restantes son similares. $\blacksquare$

Resultados preliminares para probar la completitud del cálculo

- Si hay una prueba de $\Gamma \Rightarrow \Delta$, hay una prueba de $\Gamma' \Rightarrow \Delta'$ donde Γ' (Δ') es exactamente como Γ (Δ) excepto en que tal vez reemplazamos (uniformemente) algunos términos que ocurren en Γ (Δ) por términos nuevos que no ocurren en la prueba original.

- Hay una enumeración para los términos del lenguaje.
- Si reemplazamos el axioma $A \Rightarrow A$ por $\Gamma, A \Rightarrow A, \Delta$, las reglas de monotonía se vuelven superfluas. La prueba de completitud se ofrecerá para el sistema con secuentes iniciales de la forma $\Gamma, A \Rightarrow A, \Delta$ pero sin las reglas de monotonía.
- El lema de König: todo árbol infinito que se ramifica finitamente tiene una rama infinita.

Prueba de Completitud

Como es usual, probar completitud es más complicado. Aquí usaré el método de *reducción de árboles*. Este método nos da, para cada secuente, o bien una prueba del secuente, o bien un contramodelo del secuente, y esto es suficiente para mostrar que el sistema es completo. La prueba consiste de dos partes. En la primera construimos para cada secuente un árbol de reducción que, de ser finito, nos proporciona una prueba del secuente. La idea es aplicar las reglas operacionales 'al revés', ramificando hacia arriba de ser necesario. En caso de llegar a un axioma, decimos que la rama está *cerrada*, en caso contrario decimos que la rama está *abierta*. Aplicamos este procedimiento hasta que cada rama esté cerrada o, en caso de que esto no suceda, sabemos que existe al menos una rama infinita abierta. En la segunda parte mostramos que es posible definir un contramodelo a partir de las ramas abiertas infinitas.

- *Primera parte* Consideremos entonces un secuente $\Gamma_0 \Rightarrow \Delta_0$. Construimos su árbol inductivamente, en etapas.
  Etapa 0: Sea $\Gamma_0 \Rightarrow \Delta_0$ la raíz del árbol.
  Etapa n+1:
  1. Para todas las ramas del árbol luego de la etapa n: si el nodo superior de la rama es un axioma, cerramos la rama.
  2. Para cada fórmula A en el nodo superior de cada rama abierta, si A no ha sido reducida ya en la etapa $n+1$, entonces reducimos la fórmula A del siguiente modo:
     - Si A es de la forma $\sim B$, entonces
       * Si A está en el antesecuente, tenemos un secuente de la forma $\Gamma, \sim B \Rightarrow \Delta$ y extendemos la rama hacia arriba escribiendo $\Gamma \Rightarrow B, \Delta$.
       * Si A está en el postsecuente, tenemos un secuente de la forma $\Gamma \Rightarrow \sim B, \Delta$ y extendemos la rama hacia arriba escribiendo $\Gamma, B \Rightarrow \Delta$.
     - Si A es de la forma $B \vee C$, entonces
       * Si A está en el antesecuente, tenemos un secuente de la forma $\Gamma, B \vee C \Rightarrow \Delta$ y extendemos el árbol escribiendo $\Gamma, B \Rightarrow \Delta$ en una rama y $\Gamma, C \Rightarrow \Delta$ en otra.

    * Si A está en el postsecuente, tenemos un secuente de la forma $\Gamma \Rightarrow B \vee C, \Delta$ y extendemos la rama hacia arriba escribiendo $\Gamma \Rightarrow B, C, \Delta$.
  - Si A es de la forma $\exists x B$, entonces
    * Si A está en el antesecuente, tenemos un secuente de la forma $\Gamma, \exists x B \Rightarrow \Delta$ y extendemos la rama escribiendo $\Gamma, B(t) \Rightarrow \Delta$ donde t es el primer término (en la enumeración de términos) que no ocurre en el árbol de reducción.
    * Si A está en el postsecuente, tenemos un secuente de la forma $\Gamma \Rightarrow \exists x B \Delta$ y extendemos la el árbol escribiendo $\Gamma \Rightarrow \exists x B, B(s), \Delta$ donde s es el primer término (en la enumeración de términos) que no ha sido utilizado en la reducción de A.

3. Si no hay nada más para reducir, pero el secuente en cuestión no es un axioma, simplemente repetimos el secuente encima de sí mismo.

De esto se sigue que si el árbol de reducción es finito, tiene todas sus ramas cerradas y por ende es una prueba del secuente $\Gamma_0 \Rightarrow \Delta_0$. Por otra parte, si el árbol de reducción no es finito, por el lema de König sabemos que tiene una rama infinita.

- *Segunda parte* Supongamos entonces que el árbol de construcción para el secuente $\Gamma_0 \Rightarrow \Delta_0$ contiene al menos una rama abierta infinita. Ahora necesitamos construir una interpretación que haga verdaderas a las fórmulas de Γ_0 y falsas a las fórmulas de Δ_0. Sean los miembros de esa rama abierta $\Gamma_0 \Rightarrow \Delta_0, \Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2$, etc. Sea $\bigcup \Gamma$ la unión de todos los Γ_i y sea $\bigcup \Delta$ la unión de todos los Δ_i. Lo que haremos ahora será construir una interpretación que haga verdaderas a todas las fórmulas de $\bigcup \Gamma$ (y por ende a todas las fórmulas de Γ_0) y falsas a todas las fórmulas de $\bigcup \Delta$ (y por ende a todas las fórmulas de Δ_0). Dado que $\bigcup \Gamma$ y $\bigcup \Delta$ no tienen fórmulas atómicas en común, podemos definir una interpretacion $\mathcal{M}$ de la siguiente forma:

  - $|\mathcal{M}|$ contiene a todos los términos del lenguaje.
  - Para cada término t, $t^{\mathcal{M}} = t$.
  - Para cada predicado R y términos $t_1, ..., t_n$, $R^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}, ..., t_n^{\mathcal{M}})$ si $R(t_1, ..., t_n)$ ocurre en $\bigcup \Gamma$.
  - Para cada predicado R y términos $t_1, ..., t_n$, no se da que $R^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}, ..., t_n^{\mathcal{M}})$ si $R(t_1, ..., t_n)$ ocurre en $\bigcup \Delta$.

  Podemos probar por inducción sobre la complejidad de las fórmulas que *para toda fórmula* A, $\mathcal{M} \vDash A$ si $A \in \cup\Gamma$ y $\mathcal{M} \nvDash A$ si $A \in \cup\Delta$.

  - Base: Sea A una fórmula atómica $R(t_1, ..., t_n)$. Luego, por como definimos la interpretacion $\mathcal{M}$ se cumple que $\mathcal{M} \vDash R(t_1, ..., t_n)$ si $R(t_1, ..., t_n) \in \cup\Gamma$ y $\mathcal{M} \nvDash R(t_1, ..., t_n)$ si $R(t_1, ..., t_n) \in \cup\Delta$.
  - Paso inductivo:

* Sea A de la forma $\sim B$. Asumimos primero que $\sim B$ está en $\bigcup \Gamma$. Por como está construido el árbol, sabemos que B está en $\bigcup \Delta$. Luego, por la hipótesis inductiva, $\mathcal{M} \not\models B$. Y de esto se sigue que $\mathcal{M} \models \sim B$. Por otra parte, si asumimos que $\sim B$ está en $\bigcup \Delta$, por como está construido el árbol, sabemos que B está en $\bigcup \Gamma$. Luego, por la hipótesis inductiva, $\mathcal{M} \models B$, con lo cual $\mathcal{M} \not\models \sim B$
* Sea A de la forma $B \vee C$. Primero asumimos que $B \vee C$ está en $\bigcup \Gamma$. Por como está construido el árbol, sabemos que B está en $\bigcup \Gamma$ o que C está en $\bigcup \Gamma$. Luego, por la hipótesis inductiva, $\mathcal{M} \models B$ o $\mathcal{M} \models C$. Y de esto se sigue que $\mathcal{M} \models B \vee C$. Por otra parte, si asumimos que $B \vee C$ está en $\bigcup \Delta$, por como está construido el árbol, sabemos que tanto B como C están en $\bigcup \Delta$. Luego, por la hipótesis inductiva, $\mathcal{M} \not\models B$ y $\mathcal{M} \not\models C$, con lo cual $\mathcal{M} \not\models B \vee C$.
* Sea A de la forma $\exists x B$. Asumimos primero que $\exists x B$ está en $\bigcup \Gamma$. Por como está construido el árbol, sabemos que $B(t)$ está en $\bigcup \Gamma$ para algún término t. Por la hipótesis inductiva, $\mathcal{M} \models B(t)$ para algún t y por tanto $\mathcal{M} \models \exists x B$. Por otra parte, si asumimos que $\exists x B$ está en $\bigcup \Delta$, es útil considerar el menor número i tal que $\exists x B$ ocurre en Δ_i. Por como está construido el árbol sabemos que para todo término s, $B(s)$ ocurre en algún Γ_j para $j > i$. Luego, por la hipótesis inductiva, $\mathcal{M} \not\models B(s)$ para todo término s, con lo cual $\mathcal{M} \not\models \exists x B$.

De todo esto se sigue que para toda fórmula A, si $A \in \Gamma_0$, entonces $\mathcal{M} \models A$ y si $A \in \Delta_0$, entonces $\mathcal{M} \not\models A$. Por ende, encontramos un contramodelo para $\Gamma_0 \Rightarrow \Delta_0$. ■

Ejercicios

Dificultad accesible:

1. Ofrezca una derivación de los siguientes secuentes:
   (**1**) $A \to (B \to C) \Rightarrow B \to (A \to C)$
   (**2**) $(A \,\&\, B) \to C \Rightarrow (A \to C) \lor (B \to C)$
   (**3**) $A \,\&\, \sim A \Rightarrow B$
   (**4**) $(A \to C) \,\&\, (B \to C) \Rightarrow (A \lor B \to C)$
   (**5**) $A \to \sim B \Rightarrow B \to \sim A$
   (**6**) $A \to (A \to B) \Rightarrow A \to B$
   (**7**) $\Rightarrow (A \to B) \lor (B \to A)$
   (**8**) $A \,\&\, (B \lor C) \Rightarrow (A \,\&\, B) \lor (A \,\&\, C)$
   (**9**) $\forall x P(x) \Rightarrow \exists x A(x)$
   (**10**) $\forall x A(x) \Rightarrow \sim \exists x \sim A(x)$
   (**11**) $\exists x (A(x) \,\&\, B(x)) \Rightarrow \exists x A(x) \,\&\, \exists x B(x)$
2. Muestre que las siguientes reglas son interderivables en LK con R$\lor$ y L$\lor$, respectivamente:

$$\text{R}\lor^* \; \frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \lor B, \Delta} \qquad\qquad \text{L}\lor^* \; \frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta \qquad \Pi, B \Rightarrow \Sigma}{\Gamma, \Pi, A \lor B \Rightarrow \Delta, \Sigma}$$

3. Suponga que en lugar de $A \Rightarrow A$, tenemos como secuentes iniciales todos los secuentes de la forma $A^{At} \Rightarrow A^{At}$ *donde* A^{At} *es una fórmula atómica.* Pruebe que aún así es posible derivar $A \Rightarrow A$ *para todas las fórmulas* A. (Sugerencia: Utilice inducción sobre la complejidad de las fórmulas).
4. Muestre que la siguiente regla es interderivable con la regla de Corte en LK:

$$\frac{\Gamma, A \lor \sim A \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta}$$

Dificultad intermedia:

1. Sea la *altura* de una derivación la cantidad máxima de pasos sucesivos que hay en esa derivación. Muestre que:
   (a) Si hay una derivación de $\Gamma, \sim A \Rightarrow \Delta$ de altura n que no hace uso de la regla de Corte, hay una derivación de $\Gamma \Rightarrow A, \Delta$ de altura no mayor a n que no hace uso de la regla de Corte.
   (b) Si hay una derivación de $\Gamma, A \lor B \Rightarrow \Delta$ de altura n donde no se hace uso de la regla de Corte, hay derivaciones de $\Gamma, A \Rightarrow \Delta$ y de $\Gamma, B \Rightarrow \Delta$ de altura no mayor a n que no hacen uso de la regla de Corte. (Sugerencia: pruebe ambos enunciados por inducción sobre la altura de la derivación).
2. Complete la prueba de corrección esbozada más arriba.
3. Ofrezca una prueba informal del teorema de compacidad usando la completitud de LK.