Guía 0
Conjuntos, Relaciones y Funciones

1 Conjuntos

1. Dado el conjunto $A = \{1, 2, \{3\}, \{1, 2\}, -1\}$, determinar cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas:

   (a) $3 \in A$
   (b) $\{1, 2\} \subseteq A$
   (c) $\{1, 2\} \in A$
   (d) $\{3\} \subseteq A$
   (e) $\{\{3\}\} \subseteq A$
   (f) $\varnothing \in A$
   (g) $\{-1, 2\} \subseteq A$
   (h) $\varnothing \subseteq A$
   (i) $\{1, 2, -1\} \in A$

2. Determinar si $A \subseteq B$ en cada uno de los siguientes casos:

   (a) $A = \{\varnothing\}$; $B = \varnothing$
   (b) $A = \{a, b\}$; $B = \{\{a, b\}\}$
   (c) $A = \{a, b\}$; $B = \{a, b, \{a, b\}\}$
   (d) $A = \{3, 4\}$; $B = \{\varnothing, \{3\}, \{4\}, \{3, 4\}\}$
   (e) $A = \varnothing$; $B = \{\varnothing, \{3\}, \{4\}, \{3, 4\}\}$
   (f) $A = \varnothing$; $B = \varnothing$

3. Probar que para cuaesquiera conjuntos A, B y C:

   (a) $A \subseteq A$
   (b) $\varnothing \subseteq A$
   (c) $A \subseteq B \wedge B \subseteq A \rightarrow A = B$

(d) $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \to A \subseteq C$

4. Dados los conjuntos $A = \{1, 3, 5, 7, 8, 11\}$ y $B = \{\{1\}, 3, \{5, 8\}, 7, 11\}$, hallar $A \cap B$, $A \cup B$, $A - B$ y $B - A$.

5. Probar que para cualesquiera conjuntos A, B y C:

   (a) $A \cup B = B \cup A$
   (b) $A \subseteq B \to A \cup B = B$
   (c) $A \cup \varnothing = A$
   (d) $A \cap B = B \cap A$
   (e) $A \subseteq B \to A \cap B = A$
   (f) $A \cap \varnothing = \varnothing$
   (g) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
   (h) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

6. Sean $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 3, 5, 7\}$, $C = \{a, b\}$. Hallar:

   (a) A^2
   (b) A^3
   (c) $B \times C$
   (d) $(A \cap B) \times C$
   (e) $(A \cup B) \times C$

7. Probar que para cualesquiera conjuntos A, B y C:

   (a) $A \times \varnothing = \varnothing \times A = \varnothing$
   (b) $A \subseteq B \to A \times B \subseteq B \times B$
   (c) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
   (d) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

8. Hallar el conjunto $\mathcal{P}(A)$ de partes de A en los casos:

   (a) $A = \varnothing$
   (b) $A = \{1\}$
   (c) $A = \{a, b\}$
   (d) $A = \{\text{María}, \varnothing\}$
   (e) $A = \{1, a, \{-1\}\}$
   (f) $A = \{1, \{1, 2\}\}$
   (g) $A = \{1, 3, 5, \varnothing\}$

9. Probar que para cualesquiera conjuntos A y B:

   (a) $A \in \mathcal{P}(A)$
   (b) $\varnothing \in \mathcal{P}(A)$
   (c) $A \subseteq B \leftrightarrow \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$

2 Relaciones

1. Si A es un conjunto con n elementos y B es un conjunto con m elementos, ¿cuántas relaciones de A en B hay?

2. Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Graficar la relación

$$\mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 3), (3, 1), (3, 3), (6, 4), (4, 6), (4, 4), (6, 6)\}$$

   dibujando 6 puntos en el plano que representen cada uno de los elementos de A y una flecha de a a b para cada $(a, b) \in \mathcal{R}$.

3. Si A y B son conjuntos y $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}'$ relaciones, probar que si $\mathcal{R}$ está definida de A en B y $\mathcal{R}' \subseteq \mathcal{R}$ entonces $\mathcal{R}'$ también está definida de A en B.

3 Funciones

1. Determinar si $\mathcal{R}$ es una función total o parcial o ninguna de las anteriores de A en B en los siguientes casos. Si no lo es, justificar.

   (a) $A = \{x : x$ es un país $\}$, $B = \{x : x$ es una ciudad $\}$, $\mathcal{R} = \{(x, y) \in A \times B : y$ es la capital de $x\}$
   (b) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{a, b, c, d\}$, $\mathcal{R} = \{(1, a), (2, a), (3, d), (4, b), (5, c)\}$
   (c) $A = \{x : x$ es madre biológica$\}$, $B = \{x : x$ es un nombre$\}$, $\mathcal{R} = \{(x, y) \in A \times B : y$ es el nombre del primer vástago de $x\}$
   (d) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{a, b, c, d\}$, $\mathcal{R} = \{(1, a), (2, a), (3, a), (4, b), (5, c), (3, d)\}$
   (e) $A = \{x : x$ es un país $\}$, $B = \{x : x$ es una ciudad $\}$, $\mathcal{R} = \{(x, y) \in A \times B : y$ está dentro del territorio de $x\}$
   (f) $A = \{x : x$ es un alumno de la facultad$\}$, $B = \{x : x$ es una materia$\}$, $\mathcal{R} = \{(x, y) \in A \times B : x$ aprobó $y\}$
   (g) $A = \{x : x$ es un alumno de la facultad$\}$, $B = \mathbb{N}$, $\mathcal{R} = \{(a, b) \in A \times B : x$ aprobó y materias$\}$
   (h) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{a, b, c, d\}$, $\mathcal{R} = \{(1, a), (2, a), (3, d), (4, b)\}$
   (i) $A = \{x : x$ es un ser humano$\}$, $\mathcal{R} = \{(x, y) \in A^2 : y$ es hijo de $x\}$
   (j) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b, c, d, e\}$, $\mathcal{R} = \{(1, a), (2, a), (3, e)\}$

(k) $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{R}$, $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R} : x = 2y - 3\}$

(l) $A = \{x : x$ es una fórmula atómica del lenguaje proposicional$\}$, $B = \{0, 1\}$, $\mathcal{R} = \{(x, y) \in A \times B : y = 0\}$

(m) $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{N}$, $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N} : x = 2y - 3\}$

(n) $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{Z}$, $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : x$ es divisible por $y\}$

(o) $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{N}$, $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 : y$ es el siguiente de $x\}$

2. Para cada una de las relaciones de A en B definidas en 1 que sean funciones hallar la imagen y determinar si es inyectiva, sobreyectiva o biyectiva.

3. Determinar si las siguientes funciones son inyectivas, sobreyectivas o biyectivas. Escribirlas por extensión,[1] siempre que sea posible. De no serlo, escribirlas por comprensión.

   (a) $f : \{1, 2, 3\} \to \{2, 4, 6\} / f(x) = 2x$

   (b) $f : \{0, 3, 7\}^2 \to \mathbb{N} / f(x) = x + y$

   (c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f(x) = 12x^2 - 5$

   (d) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} / f(x, y) = x + y$

   (e) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^3 / f(x) = (2x, x^2, x + 7)$

   (f) $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} / f(x, y) = 3x - 2y$

   (g) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}/$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ es par} \\ 1 & \text{si } x \text{ es impar} \end{cases}$$

4. Para las funciones dadas en 3 que no sean sobreyectivas hallar la imagen y para las que sean biyectivas, demostrarlo.

5. De ser posible, hallar fg en los siguientes casos:

   (a) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} / f(x) = 2x^2 - 18$; $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} / g(x) = x + 3$

   (b) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} / f(x) = \sqrt{x}$; $g : \mathbb{N} \to \mathbb{Z} / g(x) = -x$

   (c) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} / f(x) = x + 3$; $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} / g(x) = 2x^2 - 18$

   (d) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} / f(x) = 2x$; $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N} / g(x, y) = xy$

6. Dadas las siguientes funciones, hallar la relación inversa y decidir en cada caso si es o no una función:

   (a) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} / f(x) = x - 1$

   (b) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} / f(x) = 2x$

[1] Recuerde que una función es un conjunto de pares ordenados.

(c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f(x) = 2x$

(d) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} / f(x) = x^2$

7. Probar que para cualquier función biyectiva f, $ff^{-1}(x) = x$.