Lógica Superior:

Computabilidad e Incompletitud

Profesor: Eduardo Barrio

UBA - Filosofía

2do cuatrimestre de 2012

Modelos de conjuntos de fórmulas

Sea **Γ** un conjunto de fórmulas

M es un modelo de **Γ** { A, B, C, ..., }

M ⊨ **Γ** ssi M hace verdaderas a todos las fórmulas de **Γ**

Estamos interesados en el tipo de modelo que un conjunto de fórmulas tiene.

Ejemplos

(i) Γ es un conjunto de oraciones universalmente válidas. Cualquier interpretación es un modelo de Γ

(ii) Γ es {∃x ∀y *y*=*x*}. Cualquier interpretación cuyo dominio es un objeto es un modelo de esta fórmula.

(iii) Γ es el conjunto de las oraciones verdaderas de PA en el modelo estándar. Hay muchos modelos distintos de Γ: N, los racionales no negativos, los reales no negativos, etc.

Definibilidad

Dada una fórmula α (o una teoría T), ¿Cómo es Mod(α) o Mod(T)?

Problema de definibillidad de una clase de estructuras:

Dada una clase K de L-estructuras, ¿Existe alguna fórmula α tal que K = Mod(α)?

Si hay una fórmula α capaz de expresar la propiedad que comparten todas las estructuras que componen la clase K y sólo ellas, K es una **clase básica elemental.**

Si se necesitan infinitas fórmulas para expresar la propiedad de comparten todas las estructuras que componen la clase K y sólo ellas, K es una **clase elemental.**

Si no es posible expresar ni siquiera con un conjunto infinito de fórmulas la propiedad que comparten todas las estructuras que componen la clase K y sólo ellas, se dice que K **no es una clase elemental.**

El tamaño de los modelos

El tamaño de un modelo *M* es el tamaño de su dominio |M|.

Por ejemplo (i) tiene modelos de todos los tamaños; (ii) sólo tiene modelos de 1 elemento; (iii) tiene sólo modelos infinitos.

Ejemplo 1 (al menos tamaño *n*): Para cada *n,*
$\forall x_1\ \forall x_2 \ldots\ \forall x_{n-1}\ \exists x_n\ (x_n \neq x_1\ \&\ x_n \neq x_2\ \&\ \ldots\ \&\ x_n \neq x_{n-1})$

Esta oración es verdadera en *M* ssi hay al menos un número n de objetos en el dominio de *M.*

Example 2 (a lo sumo *n*): La oración $J_n = \neg I_{n+1}$ afirma que hay a lo sumo *n* objetos.

Example 3 (exactamente *n*): $I_n\ \&\ J_n$ es verdadera ssi el dominio contiene exactamente *n* objetos.

Example 4 (sólo modelos infinitos):

a) (Conjunto infinito Γ) $\Gamma = \{ J_1, J_2, \ldots\}$, i.e., todos los J_{ns} . Si *M* es un modelo, entonces |M| tiene a lo sumo *n* objetos para cada *n, por eso debe ser infinito*.

b) (Conjunto finito Γ) Sea R un predicado diádico. Sea Γ:

(1) $\forall x\ \exists y\ R(x, y)$
(2) $\forall x\ \forall y\ \neg(R(x, y)\ \&\ R(y, x))$
(3) $\forall x\ \forall y\ \forall z((R(x, y)\ \&\ R(y, z)) \rightarrow R(x, z))$.

Γ tiene un modelo infinito: N, con la relación R interpretada como <. Γ no tiene modelos finitos.

Definibilidad

Dada una fórmula α (o una teoría T), ¿Cómo es Mod(α) o Mod(T)?

Problema de definibillidad de una clase de estructuras:

Dada una clase K de L-estructuras, ¿Existe alguna fórmula α tal que K = Mod(α)?

Sea $\alpha = \forall x \forall y (x=y)$, entonces la fórmula define una clase básica elemental: la de los modelos cuyos dominios son los conjuntos unitarios.

Sea $\alpha = \exists x \exists y \neg (x=y)$, los modelos cuyos dominios son los conjuntos con más de un elemento son la clase básica elemental.

Sea $\alpha = \exists x_{1,\dots,} \exists x_2 \dots, \exists x_n (x_1 \neq x_2 \wedge \dots \wedge x_{n-1} \neq x_n)$, la fórmula define la clase de las estructuras cuyos dominios tienen cardinalidad mayor o igual a n.

Isomorfismos

Definición:

Dos modelos *P* y *Q* de un lenguaje *L* son *isomorficos ssi hay una función* 1-1 *j* desde |P| a |Q| que satisfacelas siguientes condiciones para las constantes, predicados y símbolos de función en *L:*

1. Para todo n-ádico predicado R y todo $p_1,...,p_n$ in |P|,

   $R^P(p_1,...,p_n)$ iff $R^Q(j(p_1),...,j(p_n))$

2. Para toda constante *c,*

   $j(c^P) = c^Q$

3. Para toda función n-ádica *f* y todo $p_1,...,p_n$ en |P|,

   $j([f^P(p_1,...,p_n)]) = f^Q(j(p_1),...,j(p_n))$.

Método para isomorfismos

Para mostrar que dos modelos son isomórficos:

1) Indicar claramente el lenguaje y las dos interpretaciones, *P* y *Q.*

2) Escribir la función *j* con dominio |P| y rango |Q|, y explicar por qué *j* es 1-1.

3) Mostrar que las cláusulas (1), (2) y (3) son correctas para cada símbolo no lógico.

Proposición 12.4 (interchangeable domains)

Proposition 12.4 (dominios intercambiables):

Supongamos que P y Q son conjuntos y hay una función *j* 1-1 de P a Q.

Supongamos que *Q* es cualquier interpretación con dominio Q. Entonces hay una interpretación P con dominio P tal que *P* es isomórfico a *Q.*

Corolario:

Para cualquier interpretación con un dominio que tenga *n* elementos, hay una interpretación isomórfica cuyo dominio es {0, 1, ..., n -1}.

Para cualquier interpretación con un dominio infinito enumerable, hay una interpretación isomórfica cuyo dominio es N.

Proposition 12.5 (Isomorphism Lemma)

Proposition 12.5 (Isomorphism Lemma):

Si *P* y *Q* son isomórficas interpretaciones del mismo lenguaje *L,* entonces para toda oración de *L,* tenemos:

(*) $P \models A$ ssi $Q \models A$.

Dos interpretaciones isomórficas son la misma interpretación en todo respecto (importante)

Dos modelos tienen el mismo tipo isomórfico si ellos son isomórficos.

Corolario:

(a) Cualquier conjunto de oraciones con un modelo finito tiene un modelo cuyo dominio es {0, 1, ..., n}

(b) Cualquier conjunto de oraciones con un modelo infinito enumerable tiene un modelo cuyo dominio es N.

Proposition 12.5 (Isomorphism Lemma)

Proposition 12.5 (Isomorphism Lemma):

Si *P* y *Q* son isomórficas interpretaciones del mismo lenguaje *L*, entonces para toda oración de *L*, tenemos:

(*) $P \models A$ ssi $Q \models A$.

Un conjunto de oraciones Γ de un lenguaje de primer orden L describe hasta el isomorfismo una estructura si la estructura es modelo de Γ y todo otro modelo de Γ es isomorfo con la estructura.

El isomorfismo es el primer límite en la representación de estructuras por un conjuntos de oraciones de cualquier lenguaje de primer orden

La representación hasta el isomorfismo es la mayor precisión a la que podemos aspirar a la hora de representar una estructura con oraciones de un lenguaje de primer orden.

Las estructuras finitas siempre pueden ser representadas hasta el isomorfismo por lenguajes de primer orden (finitos).

¿Pueden representarse las estructuras infinitas? La situación en el caso de estructuras infinitas es muy distinta. (Teorema de Löwenheim- Skolem).

Tipos de Isomorfismos:

a) Básicos

Una relación de *equivalencia* ≡ sobre un conjunto es una relación diádica que es como la igualdad en algún respecto.

Por ejemplo:

1) Personas: *a* ≡ *b* ssi *a* y *b* tienen los mismos parientes. [a≡a; si a≡b, entonces b≡a; si a≡b y b≡c, entonces a≡c.]

Queremos focalizar en las interpretaciones para un lenguaje {≡} las cuales son modelos de las siguientes oraciones:

(1) $\forall x\, x \equiv x$
(2) $\forall x\, \forall y\, (x \equiv y \rightarrow y \equiv x)$
(3) $\forall x\, \forall y\, \forall x\, ((x \equiv y \;\&\; y \equiv z) \rightarrow x \equiv z)$

(1) *a E a* (Reflexiva)

(2) *a E b* → *b E a* (Simétrica)

(3)(aEb & bEc) → aEc (Transitiva)

Cualquier relación que satisface estas condiciones es llamada una relación de equivalencia sobre el dominio X.

Tipos de Isomorfismos:

b) Modelos

Foco sobre la numerabilidad (= enumerabilidad infinita) de los modelos de *Eq,* i.e., tomemos N como el dominio, y *E* como una relación de equivalencia sobre N que sea la denotación de ≡.

Representemos M por su *signature: el número de clases de equivalencia con un número infinito de elementos*, con 1 elemento, etc.

(1, 0, 0, ...) Simplemente una clase con infinitos elementos.

(0, ∞, 0, 0...) Todo número es una clase de equivalencia separada.

Examplo 1: Γ = {Eq, ∀x ∀y *x* ≡ *y*}.
a E b para cualquier par de números *a* y *b,* Por eso, hay (sólo) una clase de equivalencia que consiste en todos los N. La signature es (1,0,0,...).
Cualquier par de modelos infinitos de Γ son isomórficos:

Si el D de *M1* es $\{a_1, a_2, ...\}$ y el D de *M2* es $\{b_1, b_2, ...\}$, los conjuntos $j(a_n) = b_n$ y *j* es un isomorfismo.

Teoremas de Löwenheim-Skolem y de Compacidad

Teorema Lowenheim-Skolem: Si un conjunto de oraciones Γ tiene un modelo, entonces tiene un modelo **enumerable** [finito o infinito].

Teorema de compacidad: Si todo subconjunto finito de un conjunto de fórmulas Γ tiene modelo, entonces Γ tiene un modelo.

Teoremas de Löwenheim-Skolem y de Compacidad

Teorema de compacidad: Si todo subconjunto finito de un conjunto de fórmulas Γ tiene modelo, entonces Γ tiene un modelo.

Un conjunto de fórmulas tiene un modelo si todos sus subconjuntos finitos lo tienen.

Corolario de finitud:

Si α es una consecuencia lógica de Γ, entonces existe un subconjunto finito Γ_0 de Γ, tal que α es una consecuencia lógica de Γ_0.

Los argumentos son esencialmente finitos y si existiera un argumento con un número infinito de premisas, el teorema asegura que dentro de ese conjunto se puede seleccionar un conjunto finito de premisas que garantiza la conclusión.

Esta virtud se convierte en una incapacidad expresiva:

Limitación expresiva: la finitud no puede expresarse por medio de una fórmula de primer orden.

No existe ningún conjunto de formulas (ni finito ni infinito) en un lenguaje de primer orden tal que sus modelos sean precisamente estructuras con dominios finitos.

FIN: No hay una función uno a uno del dominio a un subconjunto propio del mismo.

Teoremas de Löwenheim-Skolem y de Compacidad

Tres consecuencias:

Corolario 12.16:

Si Γ tiene modelos de tamaño (arbitrariamente) finito, entonces Γ tiene un modelo enumerable (= enumerablemente infinito).

Prueba: Sea $\Gamma^* = \Gamma \cup \{I_1, I_2, \ldots\}$.

Paso 1: Todo subconjunto finito de Γ* tiene modelo.
Paso 2: Γ* tiene un modelo.
Paso 3: Γ tiene un modelo enumerable.

Un conjunto Γ de oraciones es (implicacionalmente) *completo* si para todo *A* en el lenguaje, o *A* o ¬A es una consecuencia de Γ.

Un conjunto Γ de oraciones es *enumerablemente categórico* si cualquier par de modelos enumerables de Γ son isomórficos.

Teoremas de Löwenheim-Skolem

Limitación expresiva: no se puede distinguir, usando formulas de primer orden, entre los diversos cardinales a efectos de caracterizar una clase de modelos. Mod(T) debe relativizarse a cada cardinal infinito k.

Teoremas de Löwenheim-Skolem

T es categórica: si la clase de todos sus modelos es isomórfica.

1 - Sus modelos tienen la misma estructura y comparten todas sus propiedades.

2 - Una T puede tener modelos cuyos dominios tienen la misma cardinalidad pero que no son isomórficos (por no compartir todas sus propiedades)

Teoremas de Löwenheim-Skolem y de Compacidad

Corolario 12.17. Si Γ es un conjunto enumerablemente categórico de oraciones que no tiene modelos finitos, entonces Γ es completo.

Corolario 12.18.

(a) Si Γ tiene un modelo, entonces Γ tiene un modelo cuyo dominio es $\{0,\ldots, n\}$ para algún n, o bien todos los N.

(b) Si Γ no contiene símbolos de función o identidad y tiene modelo, entonces Γ tiene un modelo cuyo dominio es todos los N.

Teoremas de Löwenheim-Skolem y de Compacidad

Por el Teorema de Löwenheim- Skolem, si un conjunto de oraciones de un lenguaje de primer orden L tiene un modelo de cardinalidad infinita, entonces tiene un modelo de cada cardinalidad infinita mayor o igual que la cardinalidad de L.

Esto significa que si un conjunto de oraciones tiene como modelo una estructura infinita, también tendrá modelos de otras cardinalidades infinitas y, por tanto, no isomorfos

Es posible probar que PA tiene modelos cuyos dominios son de la misma cardinalidad de N (Alef$_0$) y que no son isomórfos a N.

Teorema de Morley: no hay teorias de un lenguaje numerable que sean categóricas en algún cardinal no numerable y dejen de serlo. (estabilidad de la categoricidad)
Hay incontables estructuras que satisfacen las fórmulas de PA.

Límites Expresivos de los Cuantificadores de Primer Orden:

Los valores de la variable abarcan todos los elementos que pertenecen al D.

La capacidad expresiva no alcanza para cuantificar sobre subconjuntos del D.

Todo teoría para la cual se cumpla L-S y no permite expresar la cuantificación sobre subconjuntos de un dominio infinito.

Cuantificador de Segundo orden:

Los valores de la variable abarcan todos los subconjuntos del D.