Lógica Superior:

Computabilidad e Incompletitud

Profesor: Eduardo Barrio
UBA - Filosofía
2do cuatrimestre de 2015

Teorema de Compacidad

Teorema de Compacidad:

Probar la satisfacibilidad de conjuntos infinitos de oraciones puede ser reducido a probar la satisfacibilidad de (sub)conjuntos finitos.

- Un conjunto es satisfacible ssi todos sus subconjuntos finitos lo son.

Consecuencias de Compacidad:

Si un conjunto de oraciones Γ tiene modelos finitos arbitrariamente grandes, entonces Γ tiene un modelo infinito.

Prueba
Consider $\Gamma^* = \Gamma \cup \{I_1, I_2, I_3, \ldots\}$. ($I_k$: hay al menos k elementos)

Todo subconjunto $\Gamma' \subset \Gamma^*$ puede contener sólo un número finito k de elementos.
Ya que I_k expresa que 'hay un modelo de tamaño $\geq$ k' y ya que Γ' tiene un modelo M de tamaño $\geq$ k: $M \models \Gamma'$.
En otras palabras: todos los subconjuntos finitos de Γ^* son satisfacibles.

Por lo tanto, por compacidad, Γ_* es satisfacible.
Pero Γ^* solo tiene modelos infinitos.
Por lo tanto, $\Gamma \subset \Gamma_*$ también debe tener un modelos infinito.

Teorema de Compacidad

Consecuencias de Compacidad:

Sea TA el conjunto de las oraciones verdaderas de PA. Para cada oración A, entonces N $\models$ A. Sin embargo, hay un modelo con dominio ω tal que no es isomórfico con N.

Prueba:

Agregar al lenguaje una nueva constante c. Para toda $k \in \omega$ el conjunto de las oraciones

$TA_{>k} = TA \cup \{c>0, c>1, ..., c>k\}$ es satisfacible. (Recordemos que: i = 0′...′ i veces sucesor.)

$TA_{\infty} = TA \cup \{c>0, c>1, c>2, ...\}$ es satisfacible.

Pero, los modelos de TA_{∞} (restrictos al lenguaje sin c) no pueden ser isomórficos a N.

Por Löwenheim-Skolem y el lema de dominios canónicos, hay modelos de TA_{∞} con dominios ω.

Teorema de Compacidad

Conceptualizando la prueba:

Para todo conjunto de oraciones Γ, cuando todos sus subconjuntos finitos son satisfacibles Γ_0, contruir un term model para Γ.

DEF:

Un ***term model*** de un lenguaje L es una interpretación en la cual todo elemento del dominio es denotado por un termino cerrado de L.

Sin la identidad, los términos cerrados de L+ pueden ser tomados como el dominio, donde L+ = L + un número infinito de constantes nuevas.

Enumerablemente infinitas nuevas constantes se pueden agregar a L para obtener L+. Por lo tanto, también se sigue el teorema Löwenheim-Skolem.

Teorema de Compacidad

Dividiendo la tarea:

Para todo conjunto de oraciones Γ, cuando todos sus subconjuntos finitos son satisfacibles Γ_0, contruir un term model para Γ.

Sean los L-sets conjuntos de oraciones del lenguaje L .

1.- El conjunto de los L-sets satisfacibles tienen ciertas propiedades de satisfacción.

2.- Las propiedades de satisfacción son de carácter finito.

3.- Las propiedades de satisfacción implican las propiedades de clausura de sus miembros.

4.- Un set tiene un term model ssi tiene las propiedades de clausura.

Pero, 3 + 4 implican que:

5.- las propiedades de satisfacción garantizan un term model (= Model existence lemma)

1+2+5 implican que hay un set infinito que tiene modelo y por lo tanto, compacidad.

Teorema de Compacidad

Paso 1:
- Comenzar con un set Γ y un L tal que Γ pertenezca a L
- Suponer que todo subconjunto finito de Γ tiene modelo. (**Objetivo**: probar que entonces Γ tiene modelo)

Paso 2:
- Probar el Finite Character Lemma
  - Γ pertenece a una familia S* que tiene las propiedades de satisfacción. (sección 13.1)

Paso 3: Extender Γ a Γ^*

- Extender L a L+:
Extender el lenguaje L agregando un número infinito (enumerable) de constantes extras.
- Agregar oraciones a Γ hasta obtener Γ^* de oraciones en L+ que tenga las propiedades de clausura (contiene suficientes de sus consecuencias) (prueba de 13.4 Lema de clausura).

Paso 4: Construir un modelo de Γ^* (Modelo canónico).

- Dado cualquier Γ^* con las propiedades de clausura, podemos construir un modelo **M** para Γ^* (15.5: Term models lemma)
- Este modelo tiene una propiedad especial: todo elemento del dominio es denotado por algún termino cerrado.
- Lo anterior implica que el dominio es enumerable.

Paso 5:
Mostrar que M es también modelo de Γ (Model existence lemma)

Si M es modelo de Γ^*, M es modelo de Γ.

Conclusión:

- Si todo subconjunto finito de Γ tiene modelo, Γ tiene un modelo.
- La cardinalidad del modelo M es enumerable. Se sigue que si Γ tiene modelo, tiene un modelo de cardinalidad enumerable (L-S).

La Prueba

Preservar Satisfacibilidad: Sea *S* una familia de conjuntos de oraciones. [Cada miembro de *S* es un conjunto de oraciones.] Entonces *S* tiene las *satisfaction properties,* si lo siguiente se cumple (a grandes rasgos, ellos dicen que cada miembro de *S* se comporta como un conjunto satisfacible de oraciones y cada miembro puede ser expandido preservando la satisfacibilidad).

(S0) Si Γ está en *S* y Γ_0 es un subconjunto de Γ, entonces Γ_0 está en *S.*
(S1) Si Γ está en *S,* para ningún A, ambos A y ¬A están en Γ.
(S2) Si Γ está en *S* y ¬¬ B está en Γ, entonces Γ ∪ B está en *S*
(S3) Si Γ está en S, (BvC) está en Γ,entonces Γ∪ B o Γ∪ C está en S.

(S4) Si Γ está en S, ¬(BvC) está en Γ,entonces Γ∪ ¬B y Γ∪ ¬C están en S.

(S5) Si Γ está en S, ∃x Bx está en Γ y c no aparece en Γ, entonces Γ∪ B(c) está en S.

(S6) Si Γ está en *S,* ¬∃x Bx está en Γ, entonces para todo término cerrado t, Γ ∪ ¬B(t) está en S.

(S7) Si Γ está en S,Γ∪ t=t está en S, para cualquier término cerrado t en el lenguaje de Γ.

(S8) Si Γ está en *S, B(s)* y *s=t* están en Γ, entonces Γ ∪ B(t) está en S.

Si S es la familia de todos los conjuntos que son satisfacibles, S tiene todas estas propiedades. De hecho, si las propiedades también se cumplen para *S*,* la familia de todos los conjuntos cuyos subconjuntos son finitos es satisfacible.
Este es básicamente lo que establece **Finite Character Lemma.**

La compacidad vincula S con *S* .* Este es básicamente lo que establece **Finite Character Lemma.**

La Prueba

The closure properties.

(C1) Para ningún A, ambos A y ¬A están en Γ*.
(C2) Si ¬¬ B está en Γ*, entonces B está en Γ *.
(C3) Si BvC está en Γ*, entonces B está en Γ* o C está en Γ*.
(C4) Si ¬(BvC) está en Γ*, entonces ¬B y ¬C están en Γ*.
(C5) Si ∃x Bx está en Γ*, entonces para algún término cerrado t de L+, B(t) está en Γ*.

(C6) Si ¬∃x Bx está en Γ*, entonces para todo término cerrado t de L+, ¬B(t) está en Γ*.

(C7) Para todo término cerrado t de L+, *t=t* está en Γ*.

(C8) Si B(s) y *s=t* está en Γ*, entonces B(t) está en Γ*

Lema de las propiedades de clausura:

4.- Si un set tiene un term model entonces tiene las propiedades de clausura.

Pero, necesitamos probar la conversa:

Sea Γ un conjunto de oraciones con las propiedades de clausura. Entonces Γ tiene un term model.

La prueba

Extender Γ a Γ^* cumpliendo Lema 13:6:

Lema 13:6:

Sea L un lenguaje y L+ un lenguaje obtenido a partir de l agregando nuevas constantes a L. Si S* es un conjunto de subconjuntos de oraciones de L+ que cumplen las propiedades de satisfacción, entonces todo conjunto Γ de oraciones de L que están en S* puede ser extendido a un conjunto Γ^* de oraciones de L+ que cumple con las propiedades de clausura.

Estrategia de la prueba:

Obtener Γ^* definiendo una secuencia progresiva de conjuntos cada vez más grandes: Γ^*: Γ_0, Γ_1, Γ_2 , Γ_3, ,...

donde Γ_1 es Γ, y cada Γ_{n+1} es de la forma $\Gamma_n \cup$ Bn es decir, se agrega exactamente una oración en cada etapa. Entonces, Γ_n es un subconjunto de todos los Γ_k, para k >n. Se asegura que cada Γ_1 está en S*. Finalmente, Γ^* es la unión de todos los Γ_n . Se asegura que Γ^* tiene las propiedades de clausura.

La Prueba

Construir un modelo de Γ^* (Term Model).

○ Sea Γ^* un conjunto de oraciones con las propiedades de clausura, podemos construir un modelo **M** para Γ^* (Term models lemma) en el cual todo elemento del dominio es denotado por algún termino cerrado, y toda oración en Γ^* es verdadera en el modelo M.

▪ Lo anterior implica que el dominio es enumerable (importante para el corolario de Löw-Skolem).

1. - Dominio del term model:
2. - Hacer corresponder a cada constante c un objeto c^M del lenguaje de Γ^*.

○ a c_1 se le asigna el objeto $c_1{}^M$

○ a c_2 se le asigna el objeto $c_2{}^M$

○ a c_3 se le asigna el objeto $c_3{}^M$

○ a c_n se le asigna el objeto $c_n{}^M$

○ $R^M (c_1{}^M, \ldots, c_n{}^M) \leftrightarrow R(c_1, \ldots, c_1)$ está en Γ^*.

M es un modelo de Γ^*.

La Prueba

Construir un modelo de Γ^* . 15.5: Term models lemma)
Se prueba **por inducción** en la complejidad de las fórmulas.
1) Para todo A, si A está en Γ^*, entonces M ⊨ A   2) Para todo A, si ¬A está en Γ^*, entonces M ⊨ ¬A

Caso atómico: A es R(c_1 ,..., c_1) Entonces M ⊨ A ssi A está en Γ*. Por eso, (1) y (2) valen ambos.

Caso no atómico:

Negación:

Supongamos que (1) y (2) valen para A. Entonces (1) vale para ¬A: Si ¬A está en Γ* entonces M ⊨ ¬A.

(2) vale para ¬A: Si ¬¬A está en Γ*, A está en Γ*. Y ya que (1) vale para A,entonces M ⊨ A y por lo tanto, M ⊨ ¬¬A.

Disyunción:

Supongamos que (1) y (2) valen para A para B. Entonces (1) vale para AvB: si AvB está en en Γ*,entonces o A o B están en Γ* (por C3). Por eso, o M ⊨ A o M ⊨ B. En cualquier caso, M ⊨ AvB.
Entonces (2) vale para AvB: si ¬ (AvB) está en en Γ*, entonces ambos ¬A y ¬B están en Γ* (por C4). Por eso, M ⊨ ¬A y M ⊨ ¬B. Por lo tanto, M ⊨ ¬(AvB).

Cuantificador existencial:

Supongamos que (1) y (2) valen para A(t), para cada término cerrado t (para cada constante c).

Entonces, (1) se cumple para ∃x Ax:
si ∃x Ax está en en Γ*, hay algún término t tal que A(t) está en Γ* (por C5). Por eso, M ⊨ A(t). Por lo tanto, M ⊨ ∃x Ax.

Entonces, (2) se cumple para ∃x Ax:
si ¬∃x Ax está en en Γ*, para todo término t tal que ¬A(t) está en Γ* (por C6). Por eso, o M ⊨ ¬A(t), para cada t. Por lo tanto, M ⊨ ¬∃x Ax (por C5).

La Prueba

Mostrar que M es también modelo de Γ (Model existence lemma. Sección 13.4)

Si M es modelo de Γ*, M es modelo de Γ.

CONCLUSIÓN:

- Si los subconjuntos finitos Γ tienen modelo, Γ tiene un modelo. (Compacidad)
- Γ tiene un modelo con un dominio enumerable. (Corolario) T. Löw-Skolem.

El term model M es también modelo de Γ: Si M es modelo de Γ*, M es modelo de Γ.

El lema de clausura 3 y el lema de term model 4 implican:

El lema de Model existence 5.

Pero, por el lema de las propiedades de satisfacción 1 y el lema de carácter finito 2,

Si S_* es un conjunto de conjuntos de oraciones sobre L+ que tiene las propiedades de satisfacción, entonces todo L-set en S_* tiene un term model.

Lo cual concluye la prueba del teorema de compacidad.

¿Por qué falla la Compacidad en segundo orden?

¿Se generaliza la prueba de a la Henkin desde la lógica de primer orden hacia la lógica de segundo orden?

No, la prueba de Henkin no se generaliza para el caso de segundo orden.

Para definir un Full Model para el Γ^{Max} en el caso de segundo orden, hay que agregar la siguiente cláusula a la función de valuación V:

1. - Si Γ^{Max} contiene $\exists x\ \phi(x)$ entonces contiene $\phi($ a) para alguna constante a del mismo orden que x.
2. - Si Γ^{Max} contiene $\exists X\ \phi(X)$ entonces contiene $\phi($ R) para alguna constante de predicado R del mismo orden que X.

En ambos casos, se define un D desde donde se asignan valores a las expresiones no lógicas y a las variables.

3. VM (‘$\exists X\ \phi(X)$’) = 1 ssi dado el conjunto de todos los subconjuntos del D, alguno de ellos satisface $\phi(X)$.

Verdad en términos un modelo definido a partir de Γ^{Max} no necesita ser equivalente a la inclusión en Γ^{Max} .

Por ejemplo, $\neg\exists X\ \phi(X)$ y por lo tanto todas las instancias de la forma $\neg\phi(R)$ para Ri en el lenguaje aumentado pueden ser miembros de Γ^{Max}, pero $\exists X\ \phi(X)$ puede ser verdadero en el modelo si algún indefinible subconjunto de D satisface $\phi(X)$. Por lo tanto, $\neg\exists X\ \phi(X)$ podría ser falsa aún si todas sus instancias definibles son verdaderas.

Es decir, aún que hemos construido un modelo, no tenemos garantías acerca de que es un modelo de Γ^{Max}.

El tamaño de los modelos

1. Teorema de Löwenheim-Skolem
(Löwenheim, 1915 para un lenguaje numerable, Skolem 1920, Skolem 1929 versión simplificada)

2. - Si Mod (Γ), Γ tiene un modelo en el cual su dominio tiene una cardinalidad que es al menos la misma que el número de símbolos del lenguaje subyacente.

Teoremas de Löwenheim-Skolem

Limitación expresiva: no se puede distinguir, usando formulas de primer orden, entre los diversos cardinales a efectos de caracterizar una clase de modelos. Mod(T) debe relativizarse a cada cardinal infinito k.