Lógica Superior:

Computabilidad e Incompletitud

Profesor: Eduardo Barrio
UBA - Filosofía
2do cuatrimestre de 2015

Autorreflexión de la aritmética

Objetivos:

- Probar la metateoría de *la aritmética en la aritmética.*

- Conectar nuestro trabajo en recursión con las nociones sintácticas de *Oración – Prueba – Consistencia*

- Representar las nociones sintácticas (Oración – *Prueba – Consistencia)* en términos de funciones recursivas.
- Dos direcciones:

- **Aritmetización de la sintaxis**

Hablar de (expresar, representar y capturar) las funciones recursivas

- Hablar de las oraciones de la aritmética y sus pruebas dentro de la aritmética.

Aritmetización de la sintaxis

Computabilidad: trabajar con funciones sobre números naturales. Codificar secuencias finitas de expresiones (lenguajes) por medio de funciones numéricas.

1. - La función concatenación es p.r.
2. - Las operaciones lógicas son recursivas.
3. - El conjunto de fórmulas y oraciones es recursivo.

Fbf (n) ssi n es el código (número de Gódel) de una fórmula bien formada de T.

Orac(n) ssi n es el código (número de Gódel) de una oración de T. - La relación de consecuencia es recursiva.

Prf(m,n) ssi m es el código de una prueba en T de una oración de T con código n.

Definibilidad aritmética: expresar y capturar

Las nociones sintácticas pueden representarse como números y propiedades de números.

¿Podemos **hablar acerca de** (talk about) todas las funciones recursivas en el lenguaje de la aritmética?

Expresar (definir) una propiedad numérica: (obtener la extensión correcta)

- Una propiedad P es expresada por una fórmula abierta $\varphi(x)$ en un lenguaje aritmético L sss para todo número n,

- Si n tiene P, entonces **$\varphi(n)$ es verdadera.**
- Si n no tiene la propiedad P, **$\neg\, \varphi(n)$ es verdadera.**

Expresar depende de la riqueza expresiva del lenguaje.

16. 1: Para cualquier función recursiva f, hay una formula φ_f tal que, para cualquier par de números naturales a y b, si f(a) = b entonces $\forall y\ \varphi_f(a, y) \leftrightarrow y = b$ es una fórmula verdadera en el modelo estándar.

Resultados

1. - Las funciones recursivas básicas son expresables en la aritmética.
2. - Las funciones “construibles” de las básicas son expresables en la aritmética.
3. - Las funciones inversas de las funciones construibles son expresables en la aritmética.

Capturar en PA

1. **Capturar** una propiedad numérica:

- Una teoría T captura una propiedad P por una fórmula abierta $\phi(x)$ en un lenguaje aritmético L sss para todo número n,

  - Si n tiene P, entonces **hay una demostración de $\phi(\underline{n})$ en T**
  - Si n no tiene la propiedad P, **hay una demostración de $\neg\phi(\underline{n})$ en T.**

Capturar depende de los axiomas y de las capacidades de prueba de una teoría.

Expresabilidad ≠ Capturabilidad

- **<u>Expresabilidad no implica capturabilidad</u>**:

- Hay propiedades numéricas que son expresables que no son capturables.
  - La fórmula Prue(x) en T expresa la propiedad de *ser una prueba*, pero ninguna fórmula puede capturar esa propiedad.

- Pero, si una teoría T captura una propiedad numérica, entonces, la expresa.

Expresabilidad en PA

Fórmula rudimentaria del lenguaje de la aritmética: una fórmula construida a partir de fórmulas atómicas usando sólo negación, conjunción, disyunción y cuantificación limitada “$\forall x<t$” y “$\exists x< t$” donde “t” es un término del lenguaje.

Fórmula $\exists$-rudimentary: $\exists x$ F, donde F es rudimentary.

Fórmula $\forall$-rudimentary: $\forall x$ F, donde F es rudimentary.

Complejidad aritmética

Todos/Algunos números mayores o igual a un número dado tienen alguna propiedad.

$$\forall x\,(x \geq y \rightarrow \phi(x))$$

$$\exists x(x \geq y \rightarrow \phi(x))$$

Los cuantificadores limitados (bounded) pueden ser vistos como conjunciones/disyunciones finitas.

Un conjunto de fbf de L_{PA} es Δ_0 sss sus fórmulas sólo tienen cuantificación limitada.
Un conjunto de fbf de L_{PA} es Σ_1 sss sus fórmulas están precedidas por al menos una cuantificación existencial ilimitada.
Un conjunto de fbf de L_{PA} es Π_1 sss sus fórmulas están precedidas por al menos una cuantificación universal ilimitada.

(El subíndice 1 indica que tenemos fórmulas que comienzan con un bloque de cuantificadores similares).
Las funciones p.r. pueden ser canónicamente expresadas por fórmulas Σ_1.

Expresabilidad de las Funciones recursivas

Lemas 16.6:

(a) Toda función recursiva f es aritmética.

(b) Todo conjunto recursivo es aritmético.

Representar y capturar

- Expresabilidad no implica capturabilidad:

- Hay propiedades numéricas que son expresables que no son capturables.

- Pero, si una teoría T captura una propiedad numérica, entonces, la expresa.

16.14: Toda función rudimentaria es representable en Q.

16.15: Toda composición de funciones rudimentarias es representable en Q.

16.16: Toda función recursiva es representable en Q por medio de una fórmula $\exists$-rudimentaria.

Expresabilidad en PA

Lema 16.8: Toda función recursiva es aritméticamente definible por medio de una fórmula ∃-rudimentary generalizada (clases de fórmulas aritméticamente equivalentes)

16.10: Toda fórmula ∃-rudimentary generalizada es aritméticamente equivalente a una fórmula ∃-rudimentary

16.11: Toda función recursiva es aritméticamente definible por medio de a una fórmula ∃-rudimentary

16.12: Toda función recursiva es obtenible por composición de funciones rudimentarias.

Decibilidad y completitud respecto de la negación

- Que una T sea decidible no quiere decir que sea completa respecto de la negación.

- Una cosa es tener un modo mecánico de decidir lo que es un teorema (decidibilidad) y otra es tener recursos suficientes como para probar o disprove toda fórmula del lenguaje.

- Cualquier teoría consistente que sea completa respecto de la negación es decidible.

- Una teoría inconsistente T es decidible.

- Que una T sea (semánticamente) completa es distinto a decir que sea completa respecto de la negación.

- Una cosa es que todas las verdades sean demostrables con el aparato axiomático de la teoría. y otra es tener recursos suficientes como para probar o disprove toda fórmula del lenguaje.

- Una teoría puede ser (semánticamente) completa sin ser completa respecto de la negación.

- La lógica de primer orden es (semánticamente) completa, la aritmética (de acuerdo al primer teorema de Gödel) es incompleta respecto de la negación.
- G no puede ser probada ni disprove en PA.