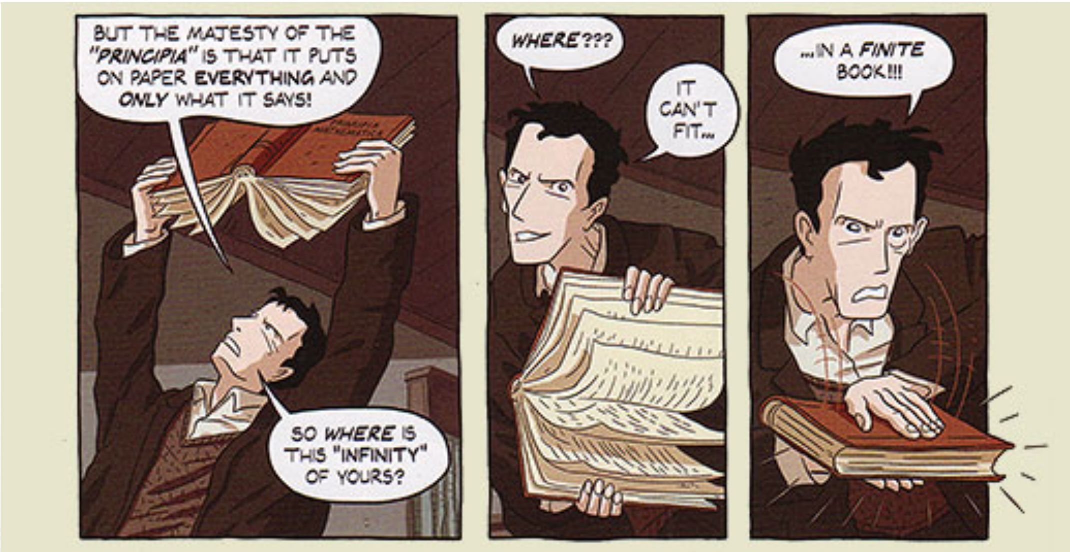
Lógica Superior:

Computabilidad e Incompletitud

Profesor: Eduardo Barrio
UBA - Filosofía
2do cuatrimestre de 2015

Compacidad


BUT THE MAJESTY OF THE "PRINCIPIA" IS THAT IT PUTS ON PAPER EVERYTHING AND ONLY WHAT IT SAYS!
SO WHERE IS THIS "INFINITY" OF YOURS?
WHERE???
IT CAN'T FIT...
...IN A FINITE BOOK!!!

El primer Teorema de Gödel

Objetivos:

- Probar que no hay una extensión axiomatizable de Q que sea consistente y completa.

- Mostrar la existencia de una verdad que sea indemostrable.

1. **Oraciones indecidibles:**

Una oración en el lenguaje de una teoría T es **indemostrable en T** si su negación es demostrable en T.

A **es indecidible** ssi ni A es demostrable ni A es indemostrable.

$\exists y\ Prf_T(x, y) \Rightarrow \exists y$ tal que y es un testigo de la demostrabilidad de x en T.

Por el lema de Diagonalización es un teorema de T:

Oración de Gödel: $\mathbf{G_T} \leftrightarrow \neg\exists y\ Prf_T(<\mathbf{G_T}>, y)$

$\mathbf{G_T}$ dice de sí misma que ella no tiene una prueba en T.

El Lema Diagonal

1. - Sea T una teoría de primer orden en el lenguaje.
2. - Supongamos que T representa **todas** las funciones recursivas.
3. - Sea B(x) una fórmula de T con una variable libre.

Hay una oración A tal que $A \leftrightarrow B(<A>)$ tiene una prueba en T.

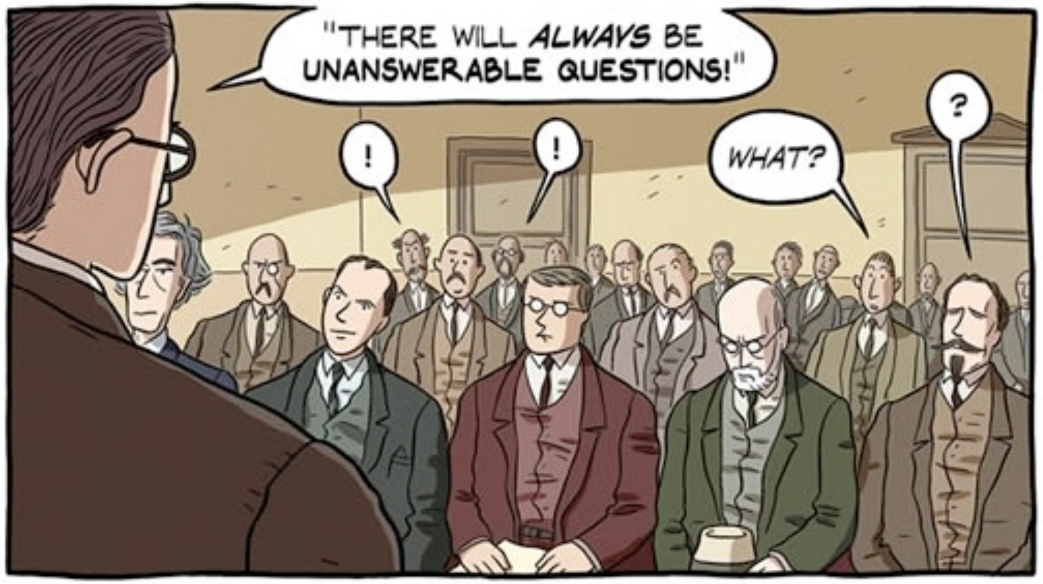
Características intuitivas de A

1. - A es autorreferencial, ya que dice que ella misma tiene B.
2. - A es un punto fijo de la operación de asignar a cada fórmula A, la oración $B(<A>)$.

$f(x) = (x^2 - 3x) + 4$ Sea $x=2$. Entonces $f(2)= 2$.

3. - Diagonalización de A es $\exists x\, (x = <A> \wedge A)$
4. - $\exists x\, (x = t \wedge B(x))$ es equivalente a $B(t)$
5. - Diagonalización de A es una oración equivalente a $B(<A>)$

Gödel en Logicomix



PA^1 es incompleta: el argumento semántico:

Teorema de Gödel: Si **PA^1** es correcta, PA es incompleta

Si **PA^1** tiene axiomas verdaderos, hay una oración A del lenguaje de **PA^1** tal que ni A ni ¬A es teorema de **PA^1.**

Supongamos que **PA^1** es correcta. Entonces todos sus axiomas son verdaderos y sus reglas transmiten verdad a los teoremas.

Por lo tanto, **PA^1** no prueba falsedades.

Si G (la cual es verdadera ssi no es probable) pudiera ser probada en **PA^1** , entonces la teoría probaría un teorema falso.

Pero, esto contradice nuestra suposición de que la teoría es correcta.

Por lo tanto, G no es probable en **PA^1** . Por eso, G es verdadera. Pero, si G es verdadera ¬G es falsa. Por lo tanto ¬G no puede ser tampoco probada.

De lo que se sigue (usando palabras de Gödel) que G es formalmente indecidible.

PA^1 es incompleta: el argumento sintáctico

Primera parte de 17.9

Teorema de Gödel: Si **PA^1** es consistente, G no es un teorema de **PA^1** .

1.- Supongamos que G fuera probable en **PA^1** .

2.- Si G es probable en **PA^1**, hay un número de Gödel m que codifica la prueba. (Ya que **PA^1** captura la relación Prf_{PA}

3.- Si G es probable en **PA^1,** $\exists y \, Prf_{PA} \, (<G>, \mathbf{y})$ es probable en T.

Pero, por el lema de diagonalización

4.- $G \leftrightarrow \neg \exists y \, Prf_{PA} \, (<G>, \mathbf{y})$

5.- $\neg \exists y \, Prf_{PA} \, (<G>, \mathbf{y})$

6.- $\exists y \, Prf_{PA} \, (<G>, \mathbf{y}) \wedge \neg \exists y \, Prf_{PA} \, (<G>, \mathbf{y})$

7.- $\perp$

Por eso,

8.- La suposición de que G es probable implica la inconsistencia de **PA^1.** Por lo tanto,

9 .- Si **PA^1** es consistente, no puede haber una prueba en **PA^1** de G.

Teorema: PA^1 es ω-incompleta ssi es consistente:

Una T aritmética es ω-incompleta ssi para alguna fórmula B(x), T puede probar cada instancia

B(m) pero no puede llegar a probar ∀xB(x).

Una teoría ω-incompleta tiene la capacidad deductiva de probar caso por caso que se cumple una condición pero la incapacidad de probar que todo número la satisface. (Q es ω-incompleta)

Prueba:

Suponer **PA^1** es consistente. Pero, G no es un teorema de **PA^1.** Es decir que ningún número es el número de Gödel de la prueba de G.

Esto es decir que, para cualquier m particular, no es el caso que $Prf_{PA}(m, <G>)$. Por lo tanto, nuevamente por el hecho de que Prf_{PA} captura Prf_{PA}, tenemos

Para cada m, es un teorema de **PA^1** $\neg Prf_{PA}(m, <G>)$. Sea $B(x)$: $\neg Prf_{PA}(m, <G>)$.

Entonces **PA^1** es ω-incompleta.

La ω-inconsistencia y los modelos no estándar

Una T aritmética es ω-inconsistente ssi para alguna fórmula B(x), T puede probar cada B(m), pero también prueba ¬∀xB(x).

Una T aritmética es ω-inconsistente ssi para alguna fórmula B(x), T prueba ∃x B(x), pero para cada número m, T prueba ¬B(m).

Si T es ω-inconsistente puede probar la negación de lo que nos gustaría probar ¬∀xB(x).

Una T puede ser ω-inconsistente, pero ser consistente y satisfacible: incapaz de probar una contradicción y tener modelos (no estándar).

Teorema 17.9 (Segunda parte): Si PA^1 es ω-consistente, G es undisprobable en PA^1

Teorema: Si T es ω-inconsistente, entonces los axiomas de T no pueden todos ser verdaderos en un modelo cuyo dominio sea el conjunto de los números naturales. Queremos teorías aritméticas que sean ω-consistentes. Y dado que **PA^1** es correcta en su interpretación estándar, estamos inclinados a pensar que es ω-**consistente.**

Teorema: Si **PA^1** es ω-consistente, ¬ G no es demostrable en **PA^1. (**A es *disprovable* en T si su negación es probable en T)

Prueba: Supongamos que

1.- G es disprovable en **PA^1.**
2.- ¬¬ ∃y Prf_{PA} **(**<G>, **y) es** demostrable es **PA^1**

3.- ∃y Prf_{PA} **(** <G>, **y) es** demostrable es **PA^1**
4.- Si **PA^1** es ω-consistente, **PA^1** es **consistente.**

Por eso,
5.- G no es demostrable en **PA^1**

Por lo tanto,
6.- Para cualquier n, n no es el testigo de una prueba de G.

7.- Para todo n, ¬ Prf_{PA} **(**<G>), **n**

Pero, contrario a nuestra hipótesis, este resultado junto con lo anterior probado haría que **PA^1** sea ω-inconsistente. (lo cual sería contradictorio).

Por lo tanto, Si **PA^1** es ω-consistente, ¬ G no es demostrable en **PA^1.**

17.3 Teorema de Tarski para PA[1]:

El conjunto de números de Gödel de las oraciones del lenguaje que son verdaderas en el modelo estándar no es capturable. (La extensión de la verdad aritmética no es capturable en la aritmética)

Prueba: Supongamos que lo fuera. Entonces, sabemos que por el lema diagonal,

1. - Hay una oración A tal que $A \leftrightarrow \neg B(<A>)$ tiene una prueba en T.
2. - Supongamos que el predicado veritativo fuera aritméticamente definible en T (se lo pudiera capturar).
3. - Entonces, $A \leftrightarrow \neg Tr(<A>)$ tiene una prueba en T.
4. - Es decir, hay una oración que es declarada verdadera en el modelo estándar y que afirma que ella no es verdadera.

1.- $A \leftrightarrow \neg Tr(<A>)$	
2.- $Tr(<A>)$	Supuesto
3.- A	Esquema-T
4.- $\neg Tr(<A>)$	MP
5.- $Tr(<A>) \wedge \neg Tr(<A>)$	
6.- $\neg Tr(<A>)$	
7. A	
8.- $Tr(<A>)$	
9.- $Tr(<A>) \wedge \neg Tr(<A>)$	
10.- $\perp$	Es un teorema de Q.

17. 4 Indicidibilidad de PA[I]:

El conjunto de números de Gödel de las oraciones del lenguaje que son verdaderas en el modelo estándar no es definible aritméticamente.

Prueba:

1. - Todos los conjuntos recursivos son definibles en la aritmética.
2. - Hay conjuntos de números de Gödel que no son definibles en la aritmética.
3. - El conjunto de los números de Gödel de las oraciones del lenguaje que son verdaderas en el modelo estandar no es definible (17. 3).
4. Supongamos la tesis de Church.
5. - No hay un procedimiento mecánico (un algoritmo) que aplicado a cualquier oración del lenguaje de la aritmética nos diga si es verdadera en el modelo estándar.

17. 6 Teorema de Church

El conjunto de fórmulas válidas no es decidible.

Prueba:

1. - Sea C la conjunción de todos los axiomas de Q.
2. - Una oración A es un teorema de Q ssi A es una consecuencia de Q. Entonces
3. - "C → A" es universalmente válida (en la lógica de primer orden)
4. - No hay un algoritmo capaz de determinar si una fórmula de primer orden cualquiera es universalmente válida.
5. - Luego, el conjunto de fórmulas válidas no es decidible.