Lógica Superior:
Computabilidad e Incompletitud

Profesor: Eduardo Barrio
UBA - Filosofía
2do cuatrimestre de 2015

Lógica y algoritmos

- *¿Es la lógica una representación formal de la operación deductiva de la razón?*

- *¿Es la lógica un modelo de la racionalidad humana?*

- *¿Hay un vínculo entre lo que es intuitivamente válido y la preservación de verdad en un modelo?*

Resultado de indecibilidad de la lógica de primer orden: la lógica formal no es mecánica.

La operación deductiva de la razón no es totalmente mecanizable.

Límites para encontrar soluciones mecánicas a problemas.

¿Quiere decir que un problema no tiene solución mecánica?

1.- La aplicación de un algoritmo no requiere:

creatividad

iniciativa

imaginación

Problema decidible: aplicación ciega de reglas para encontrar una solución a un problema.

Problemas decidibles $\Rightarrow$ Problemas de generación

Problemas de generación: Se nos pide que generemos paulatinamente todos los elementos de un determinado conjunto.

1. - Generatividad de la gramática.
2. - Generatividad de los teoremas.

Problemas decidibles

Hay un *procedimiento computable* para determinar si una pregunta

tiene

O una respuesta positiva.

O una respuesta negativa.

Problemas decidibles ⇔ conjuntos recursivos

S & su complemento son r.e.

Problemas semidecidibles ⇒ conjunto r.e.

S es r.e. & su complemento no.

- Recuérdese que hay funciones no computables.

Recursividad: conjuntos y decibilidad

Propiedades Decidibles

TEOREMA DE KLEENE:

Un conjunto S es recursivo ssi S y su complemento son r.e.

Un conjunto S es efectivamente decidible

ssi su función característica (total) es efectivamente computable.

S es (efectivamente) decidible sii su función característica C(m) =

Yes, si $m \in S$.

No, si $m \notin S$.

Recursividad: conjuntos y relaciones

Propiedades Semi-decidibles

S es semi-decidible ssi su función característica C(m) =

C(m) es una función parcial.

Yes, si $m \in S$.

Indetermin, si $m \notin S$.

Hay un procedimiento mecánico que reconoce los miembros de S, pero no hay tal cosa para los que no lo son.

Todo conjunto decidible es semidecidible.

Hay conjuntos semidecidibles que no son decidibles.

Sus funciones características nunca responden NO.

FOL: Teoría de modelos

Modelos por asignación

M $\vDash \forall x\, Fx$ ssi para todo $m \in D$, **M** $\vDash Fm$

M $\vDash \exists$**x Fx ssi** para algún $m \in D$, **M** $\vDash Fm$

Hay una función g (asignación) que [x/o] en Fx

Un ejemplo: interpretación para el lenguaje de PA

M $\vDash \exists x\, (x = 0)$

M $\vDash \forall x\, \exists y\, (s(y) = x)$

Interpretación Estándar: modelo pretendido del lenguaje o teoría.

Decibilidad: verdad, validez y consecuencia

M $\models$ A

¿Es la verdad en M decidible**?**

$\models$ A

¿Es la validez universal decidible:**?**

Γ $\models$ A

¿Es la relación de consecuencia lógica decidible:?

Decibilidad: resultado negativo

TEOREMA DE CHURCH (1936): la lógica de primer orden, considerada como un todo, es indecidible.

- Validez universal

- Consecuencia lógica

FOL: - con funciones n-ádicas entre sus términos.

- con relaciones n-ádicas entre sus predicados.

- con cualquier tipo de dominio (finitos - infinitos enumerables - no numerables)

Decibilidad: resultados positivos

Hay fragmentos de la FOL que son **decidibles.**

Que FOL sea en general indecidible, no quiere decir que **toda** teoría de primer orden sea indecidible.

Thoralf Skolem (1915)

Decibilidad de las fórmulas de LPO en universos finitos

Supongamos que D: {a.b}

M $\vDash \forall x\, Px \Leftrightarrow Pa \wedge Pb$ **M** $\vDash \exists x\, Px \Leftrightarrow Pa \vee Pb$

Tablas de verdad 2^{n} = número de valuaciones.

La verdad en M es decidible **en modelos finitos.**

Análisis de los dominios: **M** $\vDash^{k}$

Sea I una interpretación en un dominio de k elementos.

¿Cuántas relaciones n-arias son posibles en un dominio de k elementos?
Sea R una relación

$R \subseteq D^n$
$R \in \wp(D^n)$ Basta ver cuantos elementos tiene $\wp(D^n)$.

Como D^n tiene k^n elementos, $\wp(D^n)$ tiene $2(k^n)$ elementos. Luego existen $2(k^n)$ relaciones n-arias en un dominio D de k elementos.

Decibilidad de las fórmulas de LPO en universos finitos

La k-validez es decidible: $\mathbf{M} \models^{k}$

Teorema

La k-validez de una fbf A de LPO es decidible (incluyendo relaciones n-ádicas de cualquier aridad)

Dem:

Inducción sobre la complejidad de las fórmulas.

Decibilidad de las fórmulas de LPO en universos finitos

La k-validez es decidible: **M** $\models^{k}$

Ejemplos:
1. La fórmula A: $(\forall x\, Fx) \rightarrow (\exists x\, Fx)$ es 1-válida.

Dem:
Sea D = {m} k=1, n=1

2 casos: hay que investigar $2^{(1\ 1)}$ relaciones.

a. $m \in F^I$

b. $m \notin F^I$

Caso a $m \in F^I$

vale $\forall x\, F^I$ y vale $\exists x\, F^I$ Si m vale $\forall x\, F^I x$, entonces m vale $\exists x\, F^I x$

Caso b. $m \notin F^I$

No vale $\forall x\, F^I x$, no vale $\exists x\, F^I x$ luego vale si $\forall x\, F^I x$ entonces $\exists x\, F^I x$

Conclusión: A es 1-válida

Decibilidad de la Lógica monádica de primer orden

No tiene símbolos funcionales y sus únicos símbolos relacionales son monádicos.

Su semántica admite modelos cuyos dominios son de cualquier cardinalidad.

Lema 1

Si una fbf cerrada A de L^M es falsa en un modelo M de k elementos entonces es falsa en un modelo M’ de k+1 elementos.

Nota: Vale para cualquier teoría de primer orden.

Lema 2

Si una fbf cerrada A de L^M con k símbolos relacionales distintos es falso en un modelo M entonces es falso en un modelo M’ con un dominio de a lo sumo 2k elementos.

Decibilidad de la Lógica monádica de primer orden

Lema 1

Si una fbf cerrada A de L^M es falsa en un modelo M de k elementos entonces es falsa en un modelo M' de k+1 elementos.

Dem:

Sea A una fbf cerrada con n símbolos relacionales distintos $F_1,...,F_n$ y sea M con dominio D de k elementos.
$D = \{d_1, d_2,,..., d_k\}$

Sea M' un nuevo modelo con dominio D' tal que $D = \{d_1, d_2,,..., d_k,b\}$

La idea es que b se comporte como algún $d \in D$.
M´ hace las mismas interpretaciones de constantes (no hay símbolos funcionales) y las relaciones son las siguientes:

$M' (F_n (d_i))$ sii $M (F_n (d_i)$

$M' (F_n (b))$ sii $M (F_n (d))$

Se demuestra por inducción sobre la complejidad de A.

Decibilidad de la Lógica monádica de primer orden

Lema 2

Si una fbf cerrada A de L^M con k símbolos relacionales distintos es falso en un modelo M entonces es falso en un modelo M' con un dominio de a lo sumo 2^k elementos.

Dem:

Sea C una fbf cerrada de k símbolos predicativos.   Por ejemplo, sea C: $\forall x\, Ax$

Sea M un modelo con un dominio de cualquier tamaño, donde C es falsa en M.

Clasificamos a los elementos m: pertenecerán a la misma clase P, aquellos que cumplan exactamente los mismos predicados (o cumplan las mismas propiedades).

Esto es, en M' se divide el dominio en las siguientes clases:

$C1 = \{m \in D \,/\, P_1(m) \wedge P_2(m) \wedge \ldots \wedge P_k(m)\}$

$C2 = \{m \in D \,/\, P_1(m) \wedge \neg P_2(m) \wedge \ldots \wedge \neg P_k(m)\}$

...

Hay a lo sumo 2^k clases (algunas pueden ser vacías), siendo k el número de predicados que figuran en C. En el ejemplo, 1. M' tiene un dominio finito.

La falsedad en M' es decidible.

Decibilidad de la Lógica monádica de primer orden

Teorema de Löwenheim (1915):
Si una fórmula de la LPO **monádica** A (con n letras predicativas distintas) tiene modelo en un universo de al menos 2^n individuos, A tiene modelo en todo universo no vacío cualquiera sea su cardinalidad.

Teorema de la decidibilidad de Lógica de primer orden monádica:

Una fbf cerrada A con k símbolos relacionales distintos es lógicamente válida sii es 2k-válida.

Reducción del problema de la validez universal de la LPO **monádica** A al de la validez universal para dominios finitos.

Decibilidad de la Lógica monádica de primer orden

Teorema de la decidibilidad de Lógica de primer orden monádica:

Una fbf cerrada A con k símbolos relacionales distintos es lógicamente válida sii es 2k-válida.

Dem:

$\Rightarrow$) A es lógicamente válida entonces es 2k-válida.

$\Leftarrow$) Sup A no es lógicamente válida.

Luego es falso para alguna interpretación I.
Luego por **Lema 2** es falso para alguna I' de a lo sumo 2k elementos.
Luego iterando el **Lema 1** es falso para exactamente 2k elementos luego no es 2k-válida.
Pero la 2k validez es decidible.

Decibilidad parcial de la lógica de primer orden

Técnicas de normalización:

Convertir (mecánicamente) fórmulas en otras fórmulas

- CNF (forma normal conjuntiva)

Donde “A” es una fórmula atómica o negada.
$(A \vee B) \wedge (C \vee D) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee \neg C)$

- DNF (forma normal disyuntiva)

- PNF (forma normal prenexa)

Una fórmula F está en su FNP ssi tiene la forma
$Q_1x_1, \ldots, Q_nx_n\ \psi$
Donde “Q_i” es un cuantificador ($\forall\exists$) y ψ es una fórmula del lenguaje de primer orden libre de cuantificadores. (todos sus cuantificadores están adelante).

$\forall y\ \exists x\ (f(x) = y)$ está en PNF $\neg\forall y\ \exists x\ (Pxy)$ no está en PNF

Decibilidad parcial de la lógica de primer orden

Técnicas de normalización:

Hay un algorítmo que computa la transformación.

Reglas:

1. Eliminar todas los ⇔ → que aparezcan en las fórmulas

   Usar las definiciones de ⇔ → en términos de ¬ ∧ ∨

2. Interiorizar las negaciones

   a. R1 ¬∀ ⇔ ∃¬
   b. R2 ¬∃ ⇔ ∀¬

3. Exteriorizar los cuantificadores respecto de ∧ ∨

   a. R3 A∧ ∀xPx ⇔ ∀x (A∧Px)

   b. R4 A∧∃xPx ⇔ ∃x (A∧Px)

   c. R5 A∨∃xPx ⇔ ∃x (A∨Px)

   d. R6 A∨ ∃xPx ⇔ ∃x (A∨Px)

4 Mutación de variables a. R7 ∀xPx ⇔∀xPx b. R8 ∃xPx ⇔ ∃yPy

Decibilidad parcial de la lógica de primer orden

Técnicas de normalización:

Skolem Forma Normal (Skolemización) SFN

Una fórmula F está en su Skolem forma normal ssi es universal y está en su conjuntiva prenexa forma normal.

Para toda fórmula F de la lógica de primer orden, hay una F^S que está en su SFN.

Resultado: F tiene modelo sii F^S tiene modelo.

Decibilidad parcial de la lógica de primer orden

Decibilidad de las fórmulas de LPO para PNF

Clasificar las fórmulas de acuerdo con el número de cuantificadores

- $\forall\forall\forall\forall\forall\exists\exists\exists\exists$
- $\forall\exists\exists\forall\forall\exists\forall$

- Sea $\forall$ la clase de todas las fórmulas en PNF cuyo prefijo consta de un solo $\forall$.
- Sea $\forall\exists$ la clase de todas las fórmulas en PNF cuyo prefijo consta de dos cuantificadores, el $\forall$ y el $\exists$.
- $\forall\exists\exists\forall\forall\exists\forall$ la clase de todas las fórmulas en PNF cuyo prefijo consta de siete cuantificadores en ese orden
  - $\forall x \exists y \exists z \forall r \forall s \exists t \forall u\ Rxyzrstu$

1. •Resultados

- La clases $\forall^n$, $\exists^n$, $\exists^n \forall^m$ son decidibles, para cualquier n y m
- La clase $\forall^n \exists^n$ es indecidible (Skolem 1920)
- $\forall^3\exists_n$ es indecidible (Gödel 1933)
- Incluso $\forall^3\exists^1$ es indecidible
- $\exists\forall^2\exists\forall$ es indecidible
- $\forall\exists\forall$ es indecidible (Kahr, Moore & Wang 1962)