Lógica Superior:

Computabilidad e Incompletitud

Profesor: Eduardo Barrio
UBA - Filosofía
2do cuatrimestre de 2015

Tesis de Turing-Church

Las nociones de ***algorítmo*** y de ***computable*** son intuitivas.

Algoritmos ⇔ Máquina de Turing **(Tesis de Turing)**

Algoritmos ⇔ Funciones recursivas **(Tesis de Church)**

Objetivos de los caps 1 y 2

Distinción entre conjuntos infinitos que son enumerables y conjuntos infinitos que son no-enumerales

Funciones que enumeran conjuntos

Método de diagonalización: permite probar la existencia de conjuntos infinitos no-enumerables.

Se utiliza una **función anti-diagonal**

Conjuntos:

- Un conjunto es una colección de objetos.
- Los objetos son llamados miembros o elementos del conjunto.
- Usualmente, A, B, C nombran conjuntos
- Usualmente, la teoría de conjuntos se axiomatiza dentro de un lenguaje de primer orden.
- Hay distintas axiomatizaciones, pero la más usual es ZF.

P: {x tal que x es un entero positivo}
N: {x tal que x es un número natural}
E: {x tal que x es un entero par}
O: {x tal que x es un entero impar}
Z: {x tal que x es un entero } {0, 1, -1, 2, -2,… }
Q: {x tal que x es un número racional}
R: {x tal que x es un número real}
P - : {x tal que x es un entero negativo}
ϕ : el conjunto vacío

Conjuntos y funciones:

¿Cómo comparar conjuntos infinitos?

- algunas veces dos conjuntos infinitos tienen el mismo tamaño.
- algunas veces un conjunto infinito es más grande que otro.

Función:

- las funciones permiten comparar conjuntos respecto de su tamaño.

  - Asignación de ***valores*** a ***argumentos.***

  - Una función f: X→Y es una regla que asigna un miembro de Y a cada miembro de X.

    f(n) = 2n

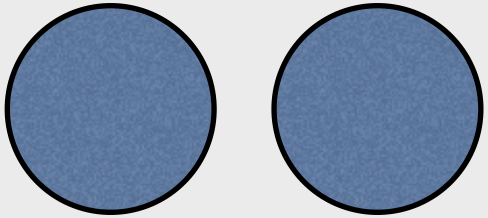
    f(1) = 2
    f(2) = 4
    f(3) = 6

    -

Conjuntos y funciones:

De los enteros positivos → los enteros pares

X → Y



- X es el **dominio** de la función f.
- Los miembros de X son los **argumentos** de f.
- Los miembros de Y son los **valores** de f.
- El conjunto de todos los valores que f asigna a uno o más argumentos es el **rango** de F.
  - El rango de f (en nuestro ejemplo) es el conjunto de los pares,

Enumerabilidad:

Caracterización informal:

Un conjunto es **contable** (enumerable) si sus miembros pueden ser enumerados

- Ordenados en una lista con una primera entrada, una segunda, etc.
- Todo miembro de la lista aparecerá tarde o temprano.

Un conjunto es **denumerable** (enumerablemente infinito) si sus miembros pueden ser enumerados y es infinito

E y P son conjuntos infinitos, son enumerables. Por lo tanto, son denumerables.

Enumerabilidad:

- Supongamos que Σ es un conjunto cuyos elementos podrían ser números, cadenas de símbolos, pruebas, programas de computadora o cualquier otra cosa.

Σ es **enumerable** si sus miembros pueden – al menos en principio – ser listados en algún orden (un primer lugar, un segundo lugar, un tercer lugar) de manera tal que cada uno de ellos aparezca tarde o temprano en la lista. Se permiten repeticiones, y la lista puede ser infinita.

Teorema:
Σ es enumerable ssi Σ es vacío o hay una función sobreyectiva. f: N → Σ (f enumera Σ)

Prueba:

1.- Supongamos que Σ es enumerable.

2.- Entonces, tenemos una lista (posiblemente infinita y posiblemente con repeticiones) de todos los miembros de Σ en algún orden.

3.- Contemos los miembros de la lista desde 0

4.- Entonces, definimos la función f como sigue:

f(n) = n miembro de la lista, si la lista llega hasta n, o f(n) = f(0) en cualquier otro caso.

Por lo tanto, f: N → Σ es sobreyectiva

6.- Supongamos que f: N →Σ es sobreyectiva.

7.- Entonces, si nosotros evaluamos f para los argumentos 0, 1, 2, 3,… , obtendremos la correspondiente lista f(0), f(1), f(2), f(3), …, la cual contiene todos los elementos de Σ (con repeticiones permitidas). (Suponer que hay un miembro de Σ que no está contemplado niega que f es sobreyectiva)

Por lo tanto, Σ es enumerable ssi hay una función sobreyectiva f: N → Σ (f enumera Σ)

Teorema de Cantor

Hay conjuntos infinitos que no son enumerables.

Sea S el conjunto de cadenas binarias infinitas s, tales como "0111100000111…"

Obviamente, hay un número infinito de tales cadenas de símbolos.

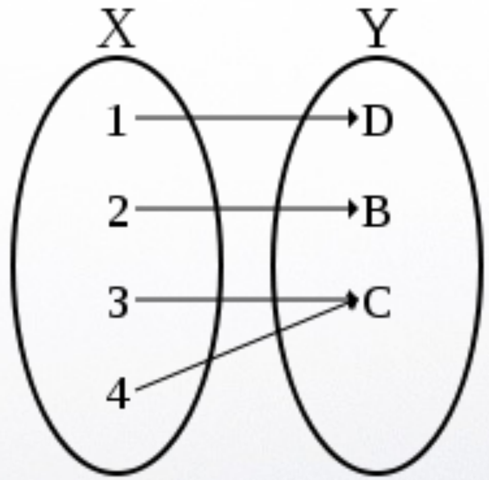
Sean s_0, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7, s_8, la lista de todos las cadenas.

Si el conjunto S fuera numerable, habría una función sobreyectiva f tal que N → S

El teorema de Cantor requiere probar que no hay una *f* tal que f es sobreyectiva.

Teorema de Cantor

Y para probar que no hay tal *f* , se supone que hay una función f que es sobreyectiva y se llega a una contradicción. Recuérdese que para probar que f no es sobreyectiva basta encontrar una cadena s_n que no sea la imagen de ningún elemento de *N* a través de *f*.



Teorema de Cantor

1.- Supongamos, por reductio, que hay una función sobreyectiva f: N → S

2. Entonces, hay una lista la cual

$0 \rightarrow s_0$: 01011101010101…

$1 \rightarrow s_1$ 01111010101011…

$2 \rightarrow s_2$ 11111110101110…

$3 \rightarrow s_3$ 01111010101010…

$4 \rightarrow s_4$ 11111111101010…

$5 \rightarrow s_5$ 11111010101010…

3.- Pero, se puede construir una nueva cadena que está en S, pero que no ha sido enumerada (esta es la cadena antidiagonal). Esa cadena difiere de s_0 en su primer lugar, difiere de s_1 en su segundo lugar, … difiere de s_n en su n lugar. Pero, esto contradice la suposición de que f es una función sobreyectiva f: N → S (que enumera a TODAS las cadenas binarias de 0s y 1s). Por eso, S es infinito, pero no es numerable.

Diagonalización

Argumentos diagonales:	Algunos establecen teoremas
	Otros producen paradojas

Argumentos diagonales:

Hablan de conjuntos (números - símbolos)

Se construyen sobre matrices

Se asume que todos los conjuntos definidos por una función están bien determinados.

Se asume que hay una función diagonal que habla de un conjunto de números bien determinado que “recorre” la diagonal de la matriz

Se define una nueva función (la anti-diagonal) a partir de la función diagonal y se muestran que los valores no están en la matriz,

Se crea un “nuevo” conjunto que no está en la matriz original

Super-humanos

Zeus y sus poderes:

Es un super-humano numerador

- Es un humano que puede hacer cálculos tan rápido y tan largos como se quiera.

- puede disponer de tiempo y espacio infinito.

Ej: Si el conjunto es infinito y enumerable, Zeus podría hacer el cálculo simplemente en un segundo.

Zeus podría escribir una secuencia finita de listas infinitas y tomar un tiempo finito para hacerlo

Sea A un conjunto formado por todos los subconjuntos de N. Por qué ZEUS no puede numerar ese conjunto?

- ¿Qué podría hacer un superhumano (como Zeus)?
    - ¿Podría Zeus ganarle la carrera a la tortuga de Aquiles?
    - ¿Qué diferencias hay entre Zeus y el corredor humano más rápido de todos?

- Reflexión: ¿Qué vínculos hay entre no numerabilidad y computabilidad?

Super-humanos

¿**ZEUS** podría numerar el conjunto de verdades del español?

Dato: Zeus podría numerar el conjunto de oraciones del español a través de la numeración de Gödel. Sea «s» el número de Gödel de s. (T) s ≡ True («s»). x ≡ True (y)

$True^3$ (x, y, z) =

- ◆1 (el valor a z), si x es verdadera de su número de Gödel y
- ◆0 (el valor a z), si x no es verdadera de su número de Gödel y.

Si el conjunto de verdades fuera numerable por Zeus, no podría encontrarse una oración a la cual no le correspondiera un valor.

- ●The Liar: Es la oración s tal que s ≡ ¬ True («s»).

◆La antidiagonal

- ◆$True^{*3}$ (x, y, z) =

- ◆1, si x no es verdadera de su número de Gödel y.
- ◆0, si x es verdadera de su número de Gödel y.