Lógica Superior:

Computabilidad e Incompletitud

Profesor: Eduardo Barrio
UBA - Filosofía
2do cuatrimestre de 2015

El segundo Teorema de Gödel

El Primer Teorema de Incompletitud de Gödel nos muestra que hay una oración indecidible.

G_{PA}

- ¿Es G_{PA} verdadera y no tiene una prueba en PA?
- ¿Es G_{PA} una afirmación importante?

El primer teorema deja abierta la posibilidad de que no haya una oración de la aritmética que sea “importante” e indemostrable.

Objetivo:

Mostrar que hay oraciones “importantes” de PA que no pueden ser demostradas dentro de PA.

Bajo la suposición de que PA es consistente, probar que la oración

$$\neg \exists y\, Prf_{PA}(\langle 0=1 \rangle, y)$$

que dice que PA es consistente, es indecidible en PA.

Segundo Teorema de Incompletitud de Gödel

A Demostración semiformal: Sea PA una teoría consistente, axiomatizada que incluye a Q.

El primer teorema de incompletitud de Gödel nos permite construir una oración

(1) $G_{PA} \leftrightarrow \neg Prf_{PA} (<G>)$ que es un teorema de PA (Lema diagonal)

A partir de este resultado, probamos:

(2) Si **PA**[1] es consistente, G_{PA} no es demostrable en **PA**[1].

Por aritmetización, podemos formular este resultado en el lenguaje de PA. Usemos "Con(PA)" para abreviar "$\neg \exists y\, Prf_{PA} (<0=1>, y)$"

(3) $Con(PA) \rightarrow \neg Prf_{PA} (<G>)$

(1) y (3) nos permiten obtener:

(4) $\neg Prf_{PA} (<0=1>) \rightarrow G_{PA}$

Ahora bien, ya que PA incluye a Q, podemos formalizar la derivación de (4) en PA.

(5) $Prf_{PA} (<Con(PA) \rightarrow (<G>) >)$

El conjunto de teoremas es cerrado bajo MP, por eso, se puede distribuir Prf_{PA}

(6) $Prf_{PA} (\ulcorner Con(PA) \urcorner) \rightarrow Prf_{PA} (<G>)$

Si tuviéramos una prueba en PA de $\neg Prf_{PA} (<0=1>)$, entonces tendríamos una prueba en PA de G_{PA} . Lo cual, por 17.9 no es posible. Entonces, la oración que expresa la consistencia no es probable en PA.

(7) $Con(PA) \rightarrow \neg Prf_{PA} (<Con(PA)>)$

Segundo Teorema de Incompletitud de Gödel

A Demostración formal: Sea PA una teoría consistente, axiomatizada que incluye a Q.

La prueba depende de tres principios:

Principios de Löb

1) Si $\vdash A$ entonces $\vdash Prf_{PA}(<A>)$

2) $\vdash (Prf_{PA}(<A_1 \rightarrow A_2>) \rightarrow (Prf_{PA}(<A_1>) \rightarrow Prf_{PA}(<A_2>)))$

3) $\vdash Prf_{PA}(<A>) \rightarrow Prf_{PA}(<Prf_{PA}(<A>)>)$

LÓGICA GL (Gödel – Löb) Considerar a Prf_{PA} como un operador modal

Segundo Teorema de Incompletitud de Gödel

A Demostración formal: Sea PA una teoría consistente, axiomatizada que incluye a Q.

La prueba depende de Tres Principios de Löb

I) Si $\vdash$ A entonces $\vdash$ Prf_{PA} (<A>)
II) $\vdash$ (Prf_{PA} (<$A_1 \rightarrow A_2$>) $\rightarrow$ (Prf_{PA} (<A_1>) $\rightarrow$ Prf_{PA} (<A_2>)))
III) $\vdash$ Prf_{PA} (<A>) $\rightarrow$ Prf_{PA} (<Prf_{PA} (<A>)>)

LÓGICA GL (Gödel – Löb) Considerar a Prf_{PA} como un operador modal

(1) $G_{PA} \leftrightarrow \neg Prf_{PA} (< G_{PA} >)$
(2) $G_{PA} \rightarrow \neg Prf_{PA} (< G_{PA} >)$
(3) $Prf_{PA} (< G_{PA} \rightarrow \neg Prf_{PA} (< G_{PA} >) >)$ Se obtiene aplicando el principio 1 de Löb.
Ahora, por Löb 2 (o distribución de Prf_{PA}), obtenemos:
(4) $Prf_{PA} (< G_{PA} >) \rightarrow Prf_{PA} (< \neg Prf_{PA} (< G_{PA} >) >))$
Ahora bien, por el principio de Löb 3 tenemos:
(5) $Prf_{PA} (< G_{PA} >) \rightarrow Prf_{PA} (< Prf_{PA} (< G_{PA} >) >))$
($\neg Prf_{PA} (< G_{PA} >) \rightarrow (Prf_{PA} (< G_{PA} >) \rightarrow 0=1)$) es una tautología (es "$\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$") y toda tautología es un teorema de PA. Por lo tanto, por Löb 1.
(6) $Prf_{PA} ((\neg Prf_{PA} (< G_{PA} >) \rightarrow (Prf_{PA} (< G_{PA} >) \rightarrow 0=1)))$
Aplicamos 2 veces Löb 2 y queda
(7) $(Prf_{PA} ((< \neg Prf_{PA} ((< G_{PA} >) >) \rightarrow (Prf_{PA} ((Prf_{PA} ((< G_{PA} >)) >)) \rightarrow Prf_{PA} ((< 0=1>))))$
Por lógica, 4, 5 y 7
(8) $Prf_{PA} (< G_{PA} >) \rightarrow Prf_{PA} ((< 0=1>)$
(9) Con (PA) $\rightarrow \neg Prf_{PA} (< G_{PA} >)$ Por definición de Con y contraposición de 8
De lo que se sigue en PA por (1) que:
(10) Con (PA) $\rightarrow G_{PA}$

Segundo Teorema de Incompletitud de Gödel

A Demostración formal:

(1) $G_{PA} \leftrightarrow \neg Prf_{PA} (< G_{PA} >)$
(2) $G_{PA} \rightarrow \neg Prf_{PA} (< G_{PA} >)$
(3) $Prf_{PA} (< G_{PA} \rightarrow \neg Prf_{PA} (< G_{PA} >) >)$ Se obtiene aplicando el principio 1 de Löb.
Ahora, por Löb 2 (o distribución de Prf_{PA}), obtenemos:
(4) $Prf_{PA} (< G_{PA} >) \rightarrow Prf_{PA} (< \neg Prf_{PA} (< G_{PA} >) >))$

Ahora bien, por el principio de Löb 3 tenemos:

(5) $Prf_{PA} (< G_{PA} >) \rightarrow Prf_{PA} (< Prf_{PA} (< G_{PA} >) >))$

$(\neg Prf_{PA} (< G_{PA} >) \rightarrow (Prf_{PA} (< G_{PA} >) \rightarrow 0=1))$ es una tautología (es "$\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$") y toda tautología es un teorema de PA. Por lo tanto, por Löb 1.

(6) $Prf_{PA} ((\neg Prf_{PA} (< G_{PA} >) \rightarrow (Prf_{PA} (< G_{PA} >) \rightarrow 0=1)))$

Aplicamos 2 veces Löb 2 y queda

(7) $(Prf_{PA} ((< \neg Prf_{PA} ((< G_{PA} >) >) \rightarrow (Prf_{PA} ((Prf_{PA} ((< G_{PA} >)) >)) \rightarrow Prf_{PA} ((< 0=1>))))$

Por lógica, 4, 5 y 7

(8) $Prf_{PA} (< G_{PA} >) \rightarrow Prf_{PA} ((< 0=1>)$
(9) $Con (PA) \rightarrow \neg Prf_{PA} (< G_{PA} >)$ Por definición de Con y contraposición de 8

De lo que se sigue en PA por (1) que:

(10) $Con (PA) \rightarrow G_{PA}$

Lo que tenemos que probar es que si PA es consistente, Con (PA) no es teorema de PA.
Esto es equivalente a mostrar que si Con (PA) es teorema, PA es inconsistente (contraposición).

Supongamos que
(11) $PA \vdash Con (PA)$
(12) $PA \vdash G_{PA}$
(13) $PA \vdash Prf_{PA} (< G_{PA} >)$ Löb 1
(14) $PA \vdash \neg G_{PA}$ (1) y (13)
(15) PA es inconsistente (12) y (14)

Paradoja de Curry:

PA podría contener axiomas adicionales sin perder su consistencia. Adicionar axiomas a PA que permitan caracterizar la verdad es posible, siempre y cuando el agregado no sean todas las instancias de (T).

Parece posible probar (sólo usando lógica), sin supuesto alguno, que Santa Claus existe.

Considérese la oración: **Si esta oración es verdadera, Santa Claus existe**

O lo que es lo mismo:

(S) Si (S) es verdadera, Santa Claus existe.

Asumir que

(1) S es verdadera. Supuesto
(2) "Si (S) es verdadera, Santa Claus existe" es verdadera.
(3) Si (S) es verdadera, Santa Claus existe.
(4) Santa Claus existe.

(4) se deriva de la suposición (1). Entonces, por TD

(5) Si (S) es verdadera, Santa Claus existe.
(6) "Si (S) es verdadera, Santa Claus existe" es verdadera.
(7) (S) es verdadera
(8) Santa Claus existe.

Principios de Reflexión:

Los principios de Reflexión expresan nuestra confianza en PA.

Vinculan las Pruebas con la Verdad

Ref $\quad \mathrm{Prf}_{PA} (< A>) \rightarrow A$

$\mathrm{Prf}_{PA} (<A>) \rightarrow \mathrm{Tr} (< A>)$

$\forall x\ \mathrm{Prf}_{PA} (<x>) \rightarrow \mathrm{Tr} (< x>)$

El teorema de Löb asegura que los principios de reflexión no son derivables en PA (si “Prov_{PA}” representa su predicado de prueba).

$\mathrm{Prf}_{PA} (< A>) \rightarrow A \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Con(PA)}.$

Por lo tanto, PA no puede implicar Ref.

¿Son G, Con(PA), y Ref. afirmaciones verdaderas?

La verdad de la oración de Gödel (G)

G debería ser afirmada.

G no debería ser rechazada.

G es una verdad que trasciende el poder de prueba (en PA).

Ya que G no es ni probable ni refutable en PA, debe haber algunos modelos de PA en los cuales es verdadera y otros en los cuales es falsa.

Por lo tanto, G no es verdadera en todos los modelos de PA.

De lo que se sigue que cuando decimos que reconocemos que G es verdadera, lo que debemos decir es que G es verdadera en los modelos estándar de PA. Es decir, nosotros debemos tener una idea definida a la cual nosotros intentamos referir cuando hablamos de los números naturales. Y en referencia a esta estructura, reconocemos que G es verdadera.

La aserción G es de la forma: $\forall x\, B(x)$, donde cada una de las aserciones B(0), B(1), B(2), ... es verdadera, ya que B(x) es recursiva, la noción de *verdad* para cada uno de estas aserciones no es problemática. Ya que cada una de las afirmaciones B(0), B(1), B(2), en todo modelo de PA, cualquier modelo de PA en el cual G sea falsa debe ser un modelo no estándar. Si para algún predicado B, podemos reconocer como verdaderas en el modelo estándar, entonces podemos reconocer que $\forall x$ B(x) es verdadera en ese modelo. Este hecho lo sabemos a partir de nuestra idea de la estructura de este modelo.